Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas.

1. **Continuidad de funciones.**

Una función es continua en $x = a$, si se cumple:

- Existe $f(a)$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$
- $\boldsymbol{f(a) = \lim_{x\to a} f(x)}$

Las funciones definidas por expresiones analíticas elementales son continuas en todos los puntos en los que están definidas. Es decir, no serán continuas en los puntos que no están dentro de su *dominio, y en los puntos de empalme de las funciones definidas a trozos.*

Dominio de una función.

El dominio de una función es el conjunto de valores de la variable x para los que existe la función. Las funciones serán continuas en los puntos en los que estén definidas. Se tendrá problemas en los siguientes casos:

- **Denominadores**: un denominador nunca se puede hacer cero.
  Ejemplo: $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$
  Habrá problemas cuando $x + 1 = 0 \ \to x = -1 \ \Longrightarrow$
  $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- **Raíces cuadradas**: el radicando no puede ser negativo. Debe mayor o igual que cero.
  Ejemplo: $f(x) = \sqrt{4x + 20}$
  Habrá problemas cuando $4x + 20 < 0 \ \to x < 5 \ \Longrightarrow$
  $Dom\ f(x) = \ \mathbb{R} - (-\infty, 5) = [5, \infty)$.
- **Logaritmos**: el argumento no se puede anular y ser negativo. Debe ser positivo.
  Ejemplo: $f(x) = \log\ (2x - 8)$
  Habrá problemas cuando $2x - 8 \leq 0 \ \to x \leq 4 \quad \Longrightarrow$
  $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - (-\infty, 4] = (4, \infty)$.

Ejemplo.

Explica por qué las funciones dadas son discontinuas en el punto cuya abscisa se señala:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 2|}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$

a) Porque no existe $f(2)$.

b) Porque no coincide $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ con $f(1) = 0$.

c) Porque no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, ya que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$.

Halla el valor de a para el que la función $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ ax^2 - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ sea continua en todos los puntos.

Se debe verificar que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a -1 exista, por lo que los límites laterales deben coincidir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -a + 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = a - 2 \end{array}\right\}$$

Por tanto, $-a + 2 = a - 2$. Resolviendo la ecuación, se tiene que $a = 2$.

Para $a = 2$, la función queda así: $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

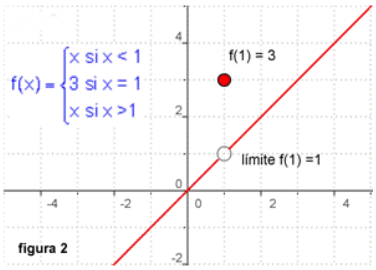
Para $a = 2$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$, al igual que $f(-1)$, por lo que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ y la función es continua.

2. Discontinuidad de funciones.

Cuando no se cumplen la tercera de las condiciones anteriores, se dice que la función $f(x)$ no es continua en $x = a$, o dicho de otra manera, $f(x)$ es discontinua.

3. Tipos de discontinuidad de funciones.

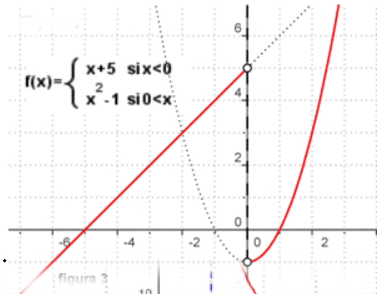
- **Discontinuidad evitable.**
  $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$



Falta ese punto: una discontinuidad de este tipo se puede evitar, si se puede definir el valor del $\lim_{x \to a} f(x)$ como el valor de $f(x)$ en ese punto, $f(a)$.

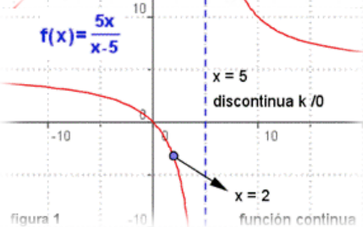
Tiene un punto desplazado: es el caso del ejemplo gráfico anterior. En este caso no es una discontinuidad evitable.

- **Discontinuidad de salto finito.**
  $\exists f(a)$, pero $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$,
  porque $\begin{cases} \lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) \\ \nexists \lim_{x \to a^+} f(x), o \nexists \lim_{x \to a^-} f(x) \end{cases}$



Será el caso de las funciones definidas a trozos.

- **Discontinuidad de salto infinito.**
  $\nexists f(a)$, y existen asíntotas verticales.



Este tipo de discontinuidades se da cuando se presentan ramas infinitas en un $x = a$ o $y = b$. (ver ejemplo anterior)

4. **Cálculo del límite de una función en un punto.**

- **Qué son y para qué sirven los límites laterales.**

  $x \rightarrow c^-$ significa que a x se le dan valores cada vez más próximos a c, pero menores que c.

  $x \rightarrow c^+$ significa que a x se le dan valores cada vez más próximos a c, pero mayores que c.

  $\lim_{x\rightarrow c^-} f(x)$ significa estudiar los valores de la función (y), para valores de x que tienden a c por la izquierda.

  $\lim_{x\rightarrow c^+} f(x)$ significa estudiar los valores de la función (y), para valores de x que tienden a c por la derecha.

- **Límite en un punto en el que la función es continua.**

  En ese caso, sencillamente habrá que sustituir la variable por el valor al que tiende en la expresión de la función, ya que se cumple que $f(c) = \lim_{x\rightarrow c} f(x)$.

- **Límite de funciones definidas a trozos.**

  Sólo tendremos problemas en los puntos de empalme de definiciones. Habrá que estudiar los límites laterales del punto en cuestión, tomando el valor de $f(x)$ que corresponda en cada caso.

Ejemplo: Sea $f(x) = \begin{cases} x+5, & si\ x<0 \\ x^2-1, & si\ x>0 \end{cases}$. Calcular el $\lim_{x\rightarrow 0} f(x)$.

Calculamos los límites laterales. Si tuvieran el mismo valor, entonces existiría el límite de la función en ese punto, y tendría el valor de esos límites.
$(\lim_{x\rightarrow a} f(x) = \lim_{x\rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x\rightarrow a^-} f(x))$

$$\lim_{x\rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\rightarrow 0^-} x+5 = -0{,}001+5 = 5.$$
$$\lim_{x\rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\rightarrow 0^+} x^2-1 = (0{,}001)^2-1 = -1.$$

Como son distintos los límites laterales, no existe el límite de la función en ese punto, y por tanto no será continua.

Si habiendo coincidido, además, el valor del límite es el mismo que el valor que toma la función en ese punto, entonces habría sido continua en el punto en cuestión.

Ejemplos.

Calcula, si existen, los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **para** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ **para** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **para** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) No existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Aunque sí los límites laterales $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$

c) No existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Aunque sí los límites laterales y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$

Decide si la función $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

es continua en $x = 0$**. ¿Y en** $x = 3$**?**

Si nos acercamos al cero por la izquierda, el valor de la función se aproxima a 1, que es el valor de f en 0. Si nos aproximamos al cero por la derecha, los valores de la función se aproximan a -1; así pues, la función no es continua en $x = 0$.

Tanto si nos acercamos por la izquierda como por la derecha al 3, la función se aproxima a 2, que es el valor de $f(3)$, luego la función es continua en $x = 3$.

Determina cuánto debe valer a **para que la siguiente función sea continua en todo R.**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a & x \leq 1 \\ x^2 - a & 1 < x \end{cases}$$

f es continua en $\mathbf{R} - \{1\}$ por tratarse de polinomios. En $x = 1$ debemos estudiar los límites laterales y deben coincidir.

$\lim_{x\to 1^-} (x^3 + a) = 1 + a$ y $\lim_{x\to 1^+} (x^2 - a) = 1 - a$. Por tanto, $1 + a = 1 - a$, es decir, $a = 0$.

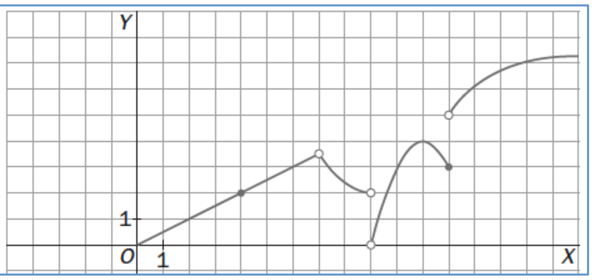
Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } 2 < x < 4 \\ -x + 13 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

Calcula, si existen, los siguientes números: $f(2)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$, $f(4)$, $\lim_{x\to 4} f(x)$, $f(5)$, $\lim_{x\to 5} f(x)$.

$f(2) = 4$; $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe; $f(4)$ no está definida; $\lim_{x\to 4} f(x) = 9$; $f(5) = 8$ y $\lim_{x\to 5} f(x) = 8$.

A partir de la gráfica de f **dada en la figura, calcula, si existe,** $\lim_{x\to 4} f(x)$, $\lim_{x\to 7} f(x)$, $\lim_{x\to 9} f(x)$ **y** $\lim_{x\to 12} f(x)$.

$\lim_{x\to 4} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 7} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 9} f(x)$ y $\lim_{x\to 12} f(x)$ no existen, al ser distintos los límites laterales.



- **Límite de un cociente de dos polinomios: $\frac{P(x)}{Q(x)}$.**
    i. Si el denominador no se anula en ese punto $(x \to c)$.
    Entonces la función es continua, y simplemente habrá que sustituir la variable por el valor al que tiende en la expresión de la función.

    ii. Si el denominador se anula y el numerador no.
    Entonces el resultado es $+\infty$, o $-\infty$, dependiendo del signo del cociente.
    NOTA: Si se tiene factorizado, será más fácil hacer el cálculo.

    iii. Si el denominador se anula y el numerador también.
    Se descomponen el numerador y el denominador aplicando Ruffini, para poder simplificar la expresión.

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to c}\frac{(x-c)\cdot P'(x)}{(x-c)\cdot Q'(x)} = \lim_{x\to c}\frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

Ejemplos.

Calcula, operando en las expresiones originales y formando una tabla de valores, los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+5x^2+x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)^{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt[3]{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$

a) 1 c) 2 e) 1

b) 2 d) 1 f) 1

Calcula, haciendo una tabla, los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-4x+4}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+4x+3}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-1}{2x^2+1}$

a) -4 c) No existe, pues $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2+4x+3}{x-3} \neq \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2+4x+3}{x-3}$

b) 0 d) $\frac{3}{2}$

Calcula, operando en las expresiones originales:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x^2 + x}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{4x^2 - x^3 - 3x}{x^2 - 3x + 2}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x^2 + x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(2x - 3)}{x(x + 1)} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 3)(x - 4)} = \dfrac{1}{-1} = -1$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{4x^2 - x^3 - 3x}{x^2 - 3x + 2}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x - 2}{(x - 1)(x - 2)} = \dfrac{-1}{0} = \infty$. Hacemos, por tanto, los límites laterales.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{4x^2 - x^3 - 3x}{x^2 - 3x + 2}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{4x^2 - x^3 - 3x}{x^2 - 3x + 2}\right) = +\infty$

Halla los siguientes límites indeterminados.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{4 - x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x}{3x}$

f) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 10x + 9}$

g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x - 2)(x - 5)}{(x + 5)(x - 5)} = \dfrac{3}{10}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2 - x}{2x(2 - x)(2 + x)} = \dfrac{1}{16}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5}}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{5 - x} + \sqrt{5}}{\sqrt{5 - x} + \sqrt{5}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{x(\sqrt{5 - x} + \sqrt{5})} = -\dfrac{1}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x + 1)}{3x} = \dfrac{1}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 1)(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 9}{(x - 1)(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \dfrac{1}{48}$

g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(6 + h)}{h} = 6$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}} \cdot \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + x^2}{\sqrt{x} + x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1 + \sqrt{x})x(1 - x)(x^2 + x + 1)}{(\sqrt{x} + x^2)(1 - x)} = 3$

5. **Comportamiento de la función cuando $x \to \infty$.**

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  Cuando la x crece, la y también lo hace.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
  Cuando la x crece, la y decrece (se hace más negativa).

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$
  Cuando la x crece, la y se acerca asintóticamente a una asíntota horizontal en $y = l$.

6. **Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$.**
   Ver pág. 157 y 158 Anaya.

Ejemplos.

Halla el valor de los límites siguientes.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-90}{x^3-3}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x}}{2-x}$

d) $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+12}-3}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-90}{x^3-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{90}{x^3}}{1-\frac{3}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{0+0-0}{1-0} = 0$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x}}{2-x} = \frac{2-\sqrt{2}}{0} = \infty$. Hacemos, por tanto, los límites laterales:

$\lim_{x\to 2^-} \frac{2-\sqrt{x}}{2-x} = +\infty$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{2-\sqrt{x}}{2-x} = -\infty$

d) $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+12}-3} = \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+12}-3} \frac{\sqrt{x+12}+3}{\sqrt{x+12}+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x+12}+3)}{x+3} = 6$

Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-x}{x^2+x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^3+x+1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2x-4}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x}-2}{\sqrt{x}+5}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2-1} = \dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-x}{x^2+x+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^3+x+1} = 2$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2x-4} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x}-2}{\sqrt{x}+5} = 2$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$

7. **Ramas infinitas. Asíntotas.**

- **Asíntota vertical. Rama infinita en $x = c$.**
  En una función existe una asíntota vertical en $x = c$ si $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$.
  Ocurre cuando $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, en los valores que anulan el denominador.

- Cuando se calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y se dan **asíntotas horizontales, oblicuas** y **ramas parabólicas**. (pág. 160 Anaya)

- Obtención de **ramas infinitas** ($x \to \infty$) en funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

  i. Grado de $P(x)$ < grado de $Q(x)$.
  Existe asíntota horizontal en $y = 0$. (porque su límite cuando x tiende a infinito es 0).

  ii. Grado de $P(x)$ = grado de $Q(x)$.

  Existe asíntota horizontal en $y = l$. (siendo l su límite cuando x tiende a infinito).

  iii. Grado de $P(x)$ $-$ grado de $Q(x) = 1$

  Existe asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$.

  iv. Grado de $P(x) -$ grado de $Q(x) \geq 2$.

  Existe una rama parabólica, hacia arriba o hacia abajo, según sea el valor del límite $+\infty$, o $-\infty$.

Ejemplos.

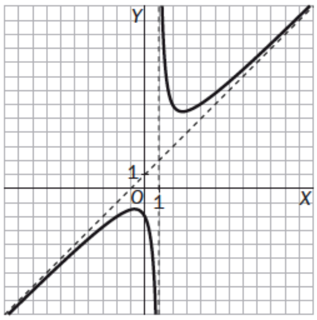
Halla todas las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ y $g(x) = \dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}$ y esboza sus gráficas.

Empecemos con $f(x)$.

Límites infinitos: asíntota vertical $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2}{x-1} = -\infty$$

Como $\dfrac{x^2+2}{x-1} = (x+1) + \dfrac{3}{x-1}$, la función tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = x + 1$.



Continuemos con $g(x)$.

Límites infinitos: asíntota vertical $x = 0$ y $x = -5$

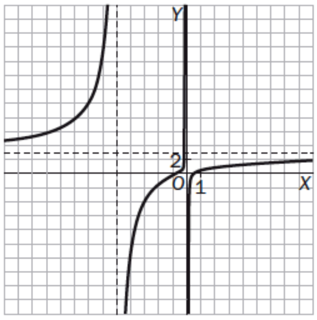
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2+x-1}{x^2+5x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2+x-1}{x^2+5x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -5^+} \frac{3x^2+x-1}{x^2+5x} = +\infty \qquad \lim_{x\to -5^-} \frac{3x^2+x-1}{x^2+5x} = -\infty$$

Límites en el infinito: asíntota horizontal $y = 3$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+x-1}{x^2+5x} = 3 \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2+x-1}{x^2+5x} = 3$$

Como tiene asíntotas horizontales, la función carece de asíntotas oblicuas.



Ejercicios del tema.

Cálculo de límites cuando $x \to a$:	Pág. 152 – 1 y 2.
	Pág. 170 – 10, 11 y 12.
Continuidad de funciones:	Pág. 153 – 3.
	Pág. 169 – 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Cálculo de límites cuando $x \to \infty$:	Pág. 157 – 1; 158 – 2 y 3.
	Pág. 170 – 15, 16; 171 - 19,
Cálculo de ramas:	Pág. 158 – 2 y 3.
Cálculo de asíntotas verticales:	Pág. 159 – 1 y 2.
	Pág. 171 – 23 y 24.
Cálculo de ramas infinitas:	Pág. 161 – 3 y 4; 162 – 2; 163 – 3 y 4.
Ejercicios final del tema:	Pág. 169 – 7; 170 – 9, 10 – 13 – 14; 171 – 21, 25, 26, 38.