



EXAMEN U4 i 5: GEOMETRIA ANALÍTICA. 1r Batx. Mat I.

Nom i Llinatges _____ Curs _____

Data _____

La presentació ha de ser bona. S'ha d'explicar i justificar qualsevol resposta i ser molt rigorós/a amb els càlculs i la notació matemàtica.

Nota: Has d'escollir 5 dels 6 exercicis. Tots valen 2 punts.

1) Troba dos vectors perpendiculars a $\vec{u}=(-1,3)$ i que a més tinguin mòdul 3.

Hi ha dues maneres de resoldre el problema.

a) Considerem un vector qualsevol $\vec{v}=(x,y)$. Aquest vector ha de complir que:

$$-\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-1,3) \cdot (x,y) = 0 \Rightarrow \boxed{-x+3y=0}$$

$$-|\vec{v}|=3 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=3 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=9}$$

Resolent el sistema format per les dues equacions obtenim dos vectors:

$$\left(\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right); \left(\frac{-9}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{u}=(-1,3)$ és $(3,1)$ però aquest vector no té mòdul 3. Si, a partir d'aquest, trobam un vector unitari: $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ en trobarem un que serà perpendicular però de mòdul 1. Bastarà multiplicar-lo per 3 per obtenir un dels vectors demanats: $\left(\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. L'altre serà l'oposat: $\left(\frac{-9}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$

2) a) Explica perquè el següent parell de vectors formen una base: $\{(-1,2), (3,5)\}$

b) Expressa el vector $\vec{u}=(-6,1)$ com a combinació lineal dels dos vectors anteriors.

Sol: a) Els dos vectors formen una base perquè no són paral·lels (fet que es pot comprovar al veure que $-1/3 \neq 2/5$)

b)

$$\left. \begin{array}{l} (-6,1) = x(-1,2) + y(3,5) \\ (-6,1) = (-x, 2x) + (3y, 5y) \\ (-6,1) = (-x+3y, 2x+5y) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -6 = -x+3y \\ 1 = 2x+5y \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=3; y=-1}$$

Per tant, $\vec{u} = 3(-1,2) - (3,5)$

3) a) Troba l'equació de la recta que passa pels punts A(-2,3) i B(5,7)

b) Troba l'equació implícita de la mediatriu del segment que té per extrems els punts A i B.

a) Com que no es demanen cap equació en concret escriurem l'equació vectorial. Per fer-ho necessitem un punt i un vector director. Agafarem el punt A(-2,3) i com a vector director: $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (7, 4)$. Així tenim: $r: (x, y) = (-2, 3) + t(7, 4)$

b) Per trobar la mediatriu, necessitem el punt mig del segment i un vector perpendicular al segment. Així, el punt mig és $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 5\right)$. Com a vector director

prendrem el vector perpendicular a l'anterior: $d_{\perp} = (-4, 7)$. Per tant, podem escriure l'equació contínua de la recta d'on trobarem l'equació implícita:

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{-4} = \frac{y - 5}{7} \Rightarrow 7x - \frac{21}{2} = -4y + 20 \Rightarrow 14x - 21 = -8y + 40 \Rightarrow \boxed{14x + 8y - 61 = 0}$$

4) a) Estudia la posició relativa de les rectes: r: $2x+3y-4=0$ i s: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=5-t \end{cases}$

b) Troba l'angle que formen les dues rectes anteriors.

Basta comprovar que els vectors directores de les dues rectes no són proporcionals. Tenim que $\vec{d}_r = (3, -2)$ i $\vec{d}_s = (-2, -1)$ que, clarament, no són proporcionals ja que $3/-2 \neq -2/-1$. Per tant, **les rectes es tallen**.

b) Per trobar l'angle que formen basta aplicar la fórmula que utilitza els vectors directores:

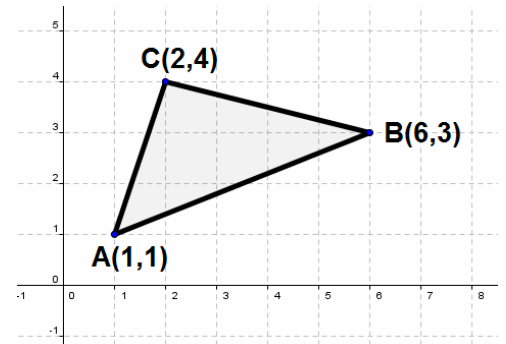
$$\cos \alpha = \frac{|3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6 + 2|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) = \boxed{60^{\circ}15'18''}$$

Per tant, les rectes formen un angle de $60^{\circ}15'18''$

5) Troba el perímetre i l'àrea del triangle que té per vèrtexs els punts A(1,1), B(6,3) i C(2,4).

Per trobar el perímetre hem de calcular el mòdul dels vectors que formen els costats del triangle. Així:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (5, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{29} \\ \overrightarrow{AC} = (1, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10} \\ \overrightarrow{BC} = (-4, 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{17} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P = \sqrt{29} + \sqrt{10} + \sqrt{17}}$$



Per trobar l'àrea agafarem com a base el mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$ i com a altura la distància que hi ha entre el punt C i la recta AB. L'equació implícita de la recta AB és $2x-5y+3=0$. Així la distància entre C i aquesta recta ve donada per:

$$d(C, r_{AB}) = \frac{|2 \cdot 2 + (-5) \cdot 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{29}} = \frac{13}{\sqrt{29}}$$

Ara ja podem trobar l'àrea del triangle:

$$A = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{|AB| \cdot d(C, r_{AB})}{2} = \frac{\sqrt{29} \cdot \frac{13}{\sqrt{29}}}{2} = \boxed{\frac{13}{2} u^2}$$

6) Troba l'equació de la circumferència que té centre al punt C(2,-3) i passa pel punt P(4,2).

Sol: Per escriure l'equació d'una circumferència només necessitam conèixer el centre i el radi. Com que el centre ens el donen només haurem de trobar el radi. El radi serà igual a la distància que hi ha entre el centre i el punt P(4,2).

$$R = d(C, P) = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Per tant, l'equació de la circumferència queda de la següent forma:

$$\boxed{(x-2)^2 + (y+3)^2 = 29}$$