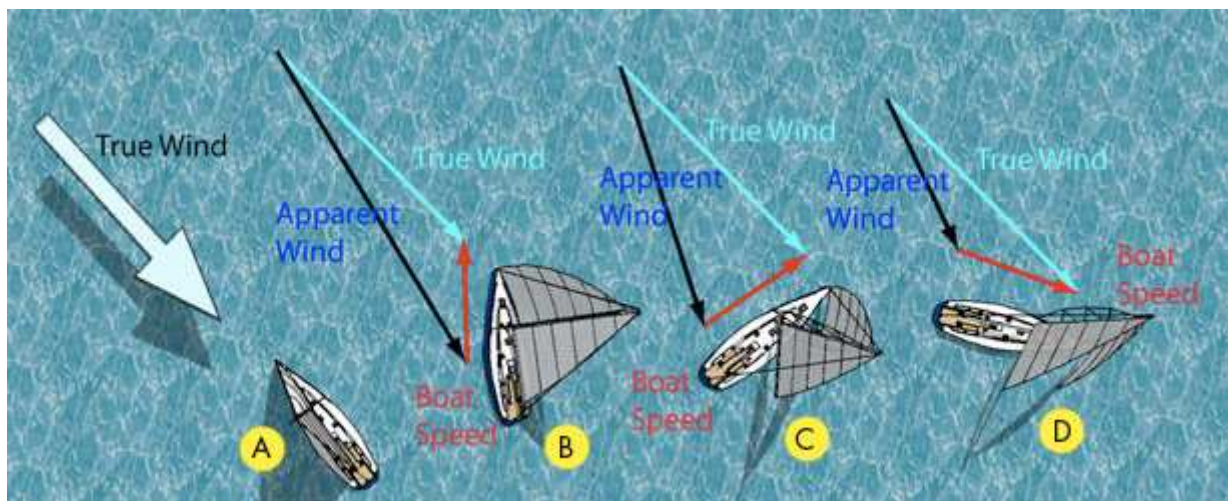


UNITATS 4 i 5: VECTORS I GEOMETRIA ANALÍTICA



Nom i Llinatges:
Curs 2013-14
1r de Batxillerat
Matemàtiques I
IES M. Àngels Cardona

Índex

- 4.1 Definició i elements d'un vector
- 4.2 Operacions amb vectors
- 4.3 Combinació lineal de vectors i bases
- 4.4 Producte escalar de dos vectors i les seves aplicacions
- 5.1 Punts i vectors en el pla
- 5.2 Equacions d'una recta
- 5.3 Paral·lelisme i perpendicularitat de rectes
- 5.4 Posició relativa de dues rectes i intersecció de rectes
- 5.5 Angle entre dues rectes
- 5.6 Distància entre dos punts
- 5.7 Distància d'un punt a una recta
- 5.8 Equacions de la circumferència i l'el·lipse
- 5.9 Autoavaluació
- 5.10 Aplicacions informàtiques i positius
- 5.11 Solucions a les activitats del llibre

Nota: Els següents apunts han estat elaborats (durant els caps de setmana d'Octubre i Novembre de 2013) en base al llibre de text emprat a classe: Matemàtiques I de l'editorial Anaya. En cap cas pretenen substituir el llibre, només volen ser un complement que faciliti el treball de l'alumne. És evident que per completar coneixements es recomana fer una lectura atenta, seriosa i completa del llibre.



4.1 Definició i elements d'un vector

Definició: En general en matemàtiques un vector és qualsevol element d'un espai vectorial (conjunt amb operació interna i externa) però en aquest tema considerarem només un tipus molt concret de vectors, els vectors d'un espai euclidià de dues dimensions que es poden representar geomètricament com a segments de recta dirigits.

Així, qualsevol vector vindrà determinat per dos punts A i B. Al vector que té **origen** en A i **final** en B l'escrivim $\overrightarrow{AB}$. També podem representar un vector sense indicar-ne l'origen i final: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$

El **mòdul** d'un vector és la distància que hi ha entre A i B i s'escriu $|\overrightarrow{AB}|$ o $\|\overrightarrow{AB}\|$

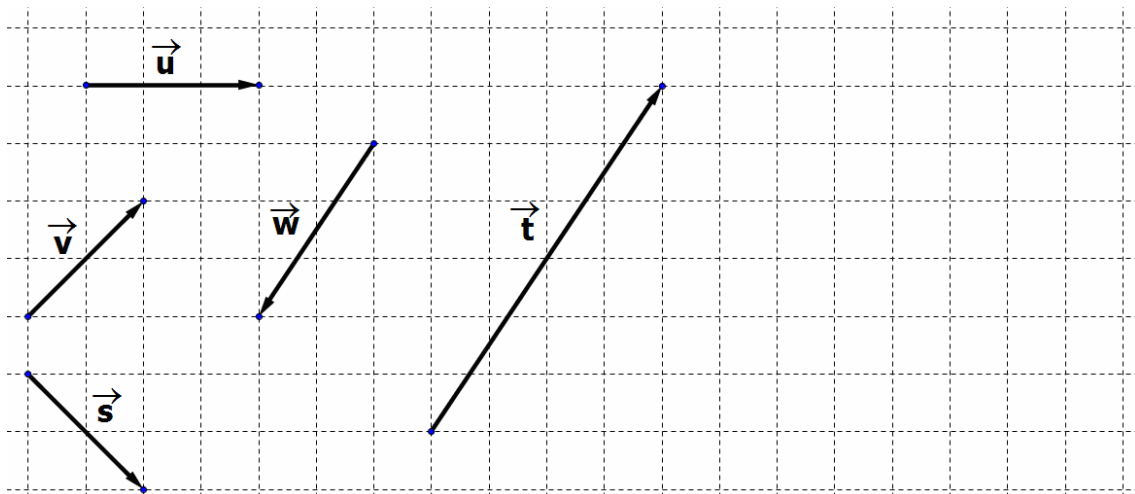
La **direcció** d'un vector és la direcció de la recta en què es troba el vector i la de totes les seves paral·leles. Cada direcció admet dos **sentits**.

Diem que dos vectors són **iguals** si tenen la **mateixa direcció, sentit i mòdul** i per tant, al operar amb un vector és com fer-ho amb qualsevol dels vectors que són iguals a aquest.

Exemple:

Donats els vectors que apareixen a la figura que tens més avall:

- Troba'n dos d'igual direcció però sentit contrari.
- Troba'n dos d'igual mòdul però direcció diferent.
- Digues quin és el que té major mòdul.
- Dibuixa un vector d'igual direcció que $\vec{u}$ però mòdul doble i sentit contrari.
- Dibuixa un vector d'igual direcció i sentit que $\vec{v}$ però amb mòdul la meitat.



4.2 Operacions amb vectors

Entre els vectors també podem definir les operacions de suma, resta, producte per un escalar i producte escalar. Vegem com es realitzen aquestes operacions tant gràficament com analíticament.



Exemple: Donats els vectors: $\vec{u} = (1, 3)$; $\vec{v} = (-2, 3)$; $\vec{w} = (0, -2)$; farem les següents operacions gràficament i analíticament:

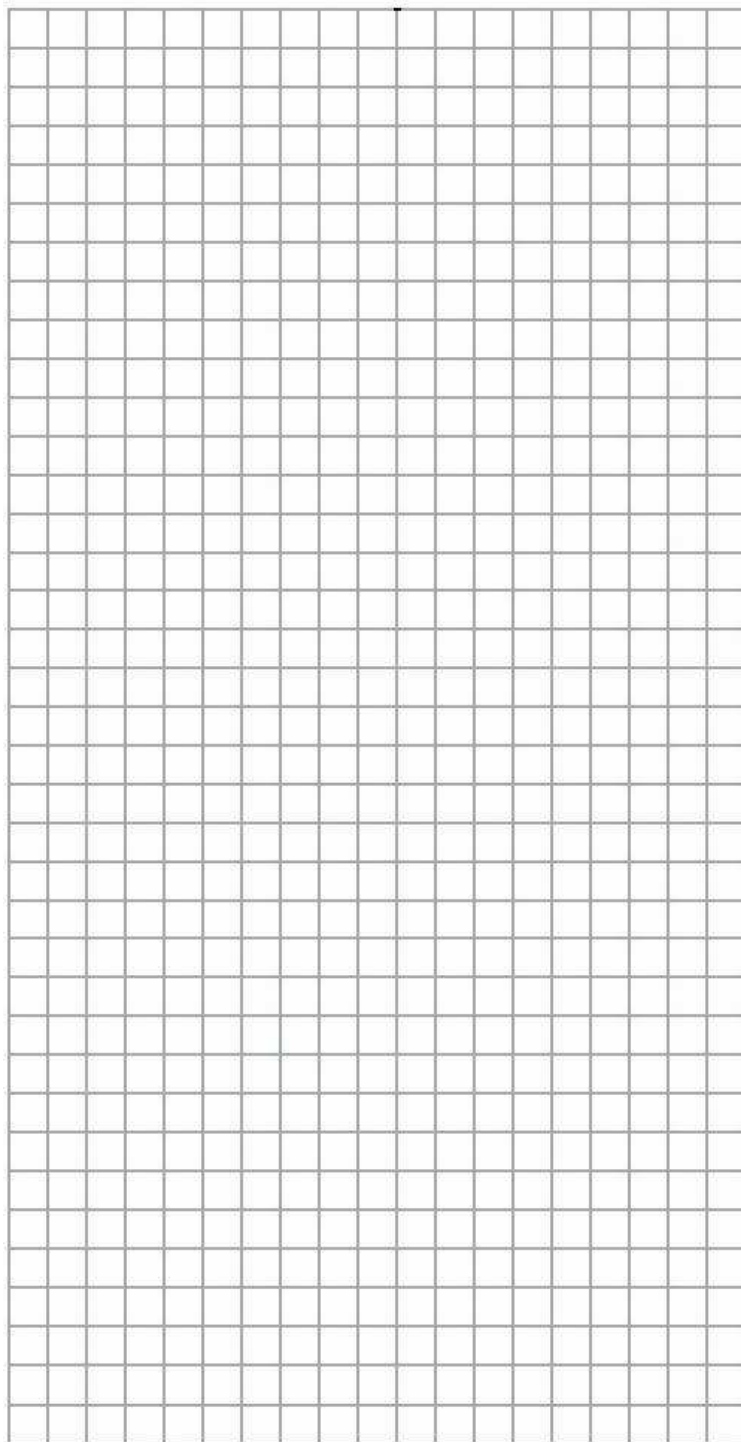
ANALÍTICAMENT**GRÀFICAMENT**

a) $2\vec{u} + \vec{v}$

b) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$

d) $2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$



Sol: a) (0,9); b) (5/2, -3/2); c) (-1,10); d) (3,5/2)

 Deures: Pàg. 175: Ex. 1; Pàg. 182: Ex. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8.



4.3 Combinació lineal de vectors i bases

Donat un conjunt de vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$... qualsevol expressió de la forma $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + \dots$ s'anomena combinació lineal dels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$...

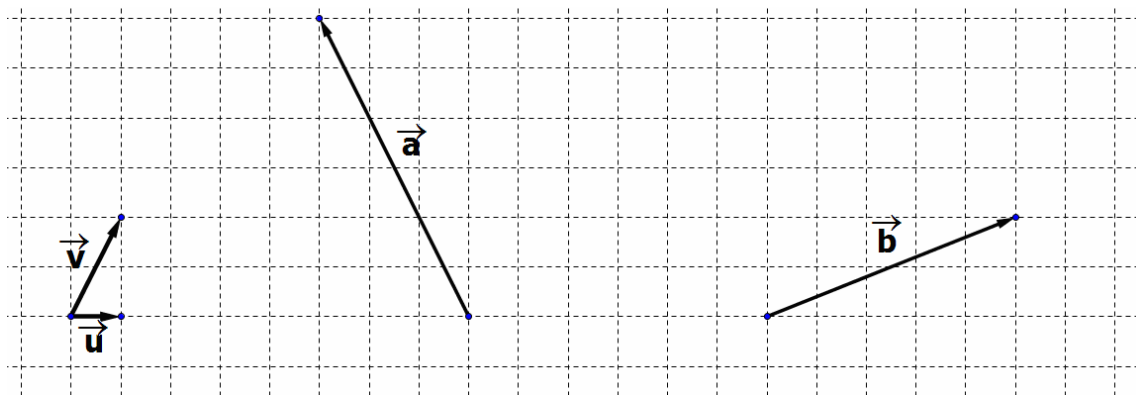
Exemple:

a) Donats els vectors $\vec{u} = (2, -3)$; $\vec{v} = (-4, 3)$; $\vec{w} = (-2, -5)$ forma una combinació lineal dels tres vectors.

b) Escriu el vector $\vec{w}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Sol: $\vec{w} = \frac{13}{3}\vec{u} + \frac{8}{3}\vec{v}$

c) També ho podem fer gràficament. Expressa els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$:



Sol: $\vec{a} = -6\vec{u} + 3\vec{v}$; $\vec{b} = 4\vec{u} + 1\vec{v}$

Important: Donat un parell de vectors amb direccions diferents, qualsevol altre vector es pot posar de forma única com a combinació lineal d'aquests dos vectors.



Deures: Pàg. 183: Ex. 12, 13, 14 i 15. Pàg. 184: Ex. 34

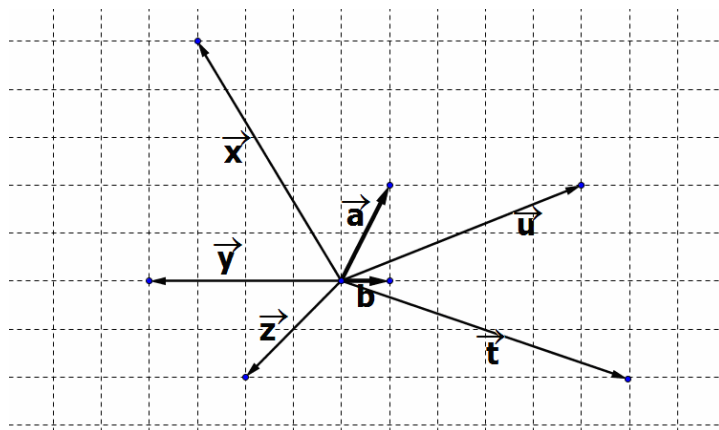
Definició: Anomenam **base** del conjunt de vectors del pla a qualsevol parell de vectors $\vec{x}$, $\vec{y}$ que no tenguin la mateixa direcció. Així, qualsevol vector del pla es podrà posar com a combinació lineal d'aquest parell de forma única.



Exemple 1: Donats els vectors $\vec{a}=(2,3)$ i $\vec{b}=(-2,3)$ explica perquè formen una base del conjunt de vectors del pla. Escriu el vector $(3,5)$ en aquesta base.

$$\text{Sol: } (3,5) = \left(\frac{19}{12}, \frac{1}{12} \right)_B$$

Exemple 2: Escriu els vectors següents en funció de la base formada pels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$:



$$\text{Sol: } \vec{u}=(1,4); \vec{t}=(-1,7); \vec{z}=(-1,-1); \vec{x}=(2'5, -5'5); \vec{y}=(0,-4)$$

Nota: Tot i que alguns dels resultats serien igualment vàlids, a partir d'ara considerarem tot vector expressat en una base ortonormal (dos vectors perpendiculars i de mòdul 1)

Deures: Pàg. 182: Ex. 9; Pàg. 183. Ex. 16.

4.4 Producte escalar de dos vectors i les seves aplicacions

A) Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ en definim el **seu producte escalar** (un nombre) com:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

És a dir, a partir de dos vectors obtenim un nombre.

Nota: Si les coordenades dels vectors són $\vec{u}=(u_1, u_2)$; $\vec{v}=(v_1, v_2)$, llavors es compleix que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Exemples:

1) Donats els vectors $\vec{u}=(3,-2)$, $\vec{v}=(1,2)$ i $\vec{w}=(-2,5)$ troba:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} =$



b) $(2\vec{u}) \cdot (-3\vec{v}) =$

c) $2\vec{u} \cdot (\vec{v} - 3\vec{w}) =$

Sol: a) -1; b) 6; c) 94

2) Donats els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dels que només sabem que tenen mòdul 2 i 3 respectivament i que a més formen un angle de 60 graus. Troba:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$

Sol: a) 3; b) 1

Deures: Pàg. 176: Ex. 1, 2 i 3; Pàg. 183: Ex. 18, 19 i 20.

B) Càlcul del mòdul d'un vector donades les seves coordenades:

Segui $\vec{u} = (a, b)$, llavors tenim que:

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemple: Troba el mòdul del vector $\vec{u} = (-3, 6)$.

Sol: $|\vec{u}| = 3\sqrt{5}$

Definició: A un vector de mòdul 1 se l'anomena **unitari**.

Exemple 1: Comprova que el vector $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$ és unitari.

Obtenció de vectors unitaris: Donat un vector qualsevol, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ és relativament fàcil trobar un vector amb la mateixa direcció i sentit que $\vec{u}$ però unitari. Bastarà multiplicar-lo per l'invers del seu mòdul:

$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|} (u_1, u_2)$$

Exemple: Donat el vector $\vec{u} = (-1, 2)$:

a) Comprova que no és unitari.

b) Troba un parell de vectors unitaris amb la mateixa direcció que $\vec{u}$

Sol: a) $|\vec{u}| = \sqrt{5}$; b) $\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right); \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right)$

Deures: Pàg. 183: Ex. 21, 22, 23, 24, 25 i 26.

**C) Aplicacions del producte escalar de dos vectors:**

El producte escalar de vectors ens servirà, bàsicament, per tres coses :

C.1) Comprovar si dos vectors són perpendiculars (ortogonals):

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Exemple 1: Comprova si els vectors $\vec{u}=(3,-2)$ i $\vec{v}=(1,2)$ són perpendiculars.

Sol: No ho són.

Exemple 2: Donat el vector $\vec{u}=(3,-2)$ troba'n 4 que siguin paral·lels a $\vec{u}$ i altres 4 que siguin perpendiculars a $\vec{u}$. Mira, també, si $(4'5, -3)$ és paral·lel a $\vec{u}$.

Exemple 3: Troba el valor de k de forma que el vector $(-3,k)$ sigui:

- Paral·lel a $\vec{u}=(3,-2)$:

- Per perpendicular a $\vec{u}$:

Sol: a) $k=2$; b) $k=-9/2$

C.2) Calcular l'angle que formen dos vectors:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Exemple 1: Troba l'angle que formen els vectors $\vec{u}=(3,-2)$ i $\vec{v}=(1,2)$

Sol: $97^{\circ}7'30''$

Exemple 2: Donat $\vec{u}=(4,-3)$ i $\vec{v}=(5,k)$, troba el valor de k de forma que els dos vectors formin un angle de 60° .

Sol: $k = \frac{240 - 125\sqrt{3}}{11}$



Exemple 3: Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ unitaris que formen un angle de 60° , troba $|\vec{a} + \vec{b}|$ i $|\vec{a} - \vec{b}|$. **Pista:** Demostra primer que $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Sol: a) $\sqrt{3}$; b) 1

 Deures: Pàg. 178: Ex. 4; Pàg. 184: Ex. 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35 (igual que exemple 3 del punt C.2), 37, 40, 41, 47.

5.1 Punts i vectors en el pla

Nota: Tot i que molts dels conceptes explicats es poden estendre a qualsevol sistema de referència, a partir d'ara considerarem un **sistema de referència** amb una base ortonormal $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. D'aquesta manera, cada vegada que ens referim al punt $A(a,b)$ ens referim l'element $O + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$

A) Coordenades del vector que uneix dos punts:

Donats $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, tenim que: $\vec{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Exemple: Donats els punts $A(2, -3)$ i $B(-5, 7)$, troba:

$$\vec{AB} =$$

$$\vec{BA} =$$

Sol: a) $(-7, 10)$; b) $(7, -10)$

B) Pendent d'una recta que té la mateixa direcció que un vector donat:

Donat un vector $\vec{u} = (a, b)$, el pendent d'una recta que té la mateixa direcció que el vector és: $m_{\vec{u}} = \frac{b}{a}$. En aquest cas diem que aquest vector és el **vector director** de la recta.

Exemple: Troba el pendent d'una recta que té per vector director:

$$\vec{u} = (3, -5)$$

$$\vec{v} = (-2, -4)$$

$$\vec{w} = (5, 0)$$

$$\vec{x} = (0, 7)$$

Un vector perpendicular a $\vec{u}$:

Sol: a) $-5/3$; b) 2; c) 0; d) No definida; e) $3/5$

Exemple 2: Troba un vector director per cadascuna de les rectes de les quals en sabem el seus pendents:

$$m_1 = 3$$

$$m_2 = -3/5$$

$$m_3 = 0$$

Sol: a) $(1, 3)$; b) $(5, -3)$; c) $(1, 0)$



Nota: Si el pendent d'una recta és m , el de la recta perpendicular serà:

I per tant, $m \cdot m_{\perp} =$

C) Punts alineats

Els punts A, B i C estaran alineats sempre que els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ per exemple, siguin paral·lels. És a dir, sempre que els pendents de les rectes de les quals en són vectors directores siguin les mateixes. Per tant, per saber si tres punts estan alineats bastarà comprovar si aquests pendents coincideixen. Vegem-ho millor amb un parell d'exemples.

Exemple 1:

Digues si els punts A(2,3), B(-3,4) i C(7,9) estan alineats.

Sol: No hi estan.

Exemple 2:

Troba x perquè els punts A(2,3), B(-3,4) i C(7,x) estiguin alineats.

Sol: $x=2$

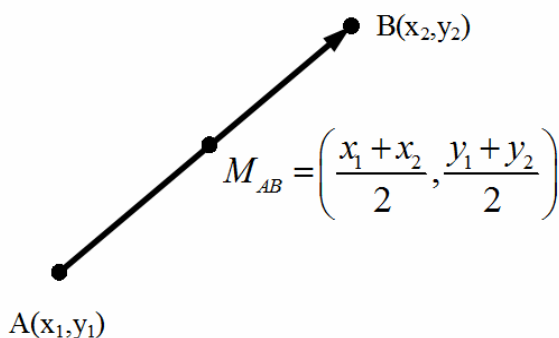
 Deures: Pàg. 189: Ex. 1, 2, 3; Pàg. 206: 2

D) Punt mitjà entre altres dos punts

Trobar el punt mitjà entre altres dos punts es pot fer de manera raonada però existeix una fórmula que ens ajuda a anar una mica més ràpid. És la que pots veure a la figura adjunta de la dreta.

Anem a demostrar com s'obté aquesta fórmula.

Dem:





Exemple1: Troba, emprant la fórmula, el punt mitjà entre els punts A(2,3) i B(-7,8)

Sol: $(-5/2, 11/2)$

Exemple 2: Troba, de forma raonada, el punt mitjà entre els punts A(2,3) i B(-7,8)

Exemple 3: De la mateixa manera que en el cas anterior, troba els dos punts que divideixen el segment format pels punts A(2,3) i B(10,15) en tres parts iguals. I en quatre parts iguals?

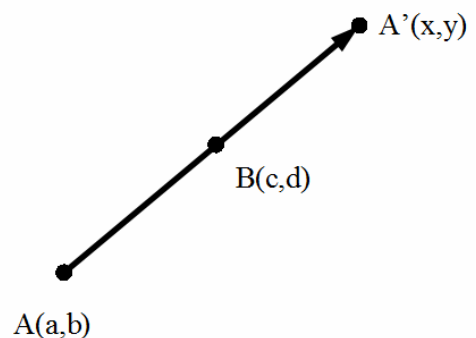
Sol: En tres parts: $(14/3, 7)$ i $(22/3, 11)$. En quatre parts $(4,6)$; $(6,9)$; $(8,12)$.

E) Simètric d'un punt respecte a un altre.

Si cercam el simètric de A respecte de B, el punt B serà el punt mitjà entre el punt A i aquest simètric A' que cercam (mira la figura).

Això ens dóna una pista de com trobar el simètric d'un punt respecte d'un altre.

Exemple: Troba el simètric del punt A(2,3) respecte del punt B(5,7).



Sol: $A'=(8,11)$

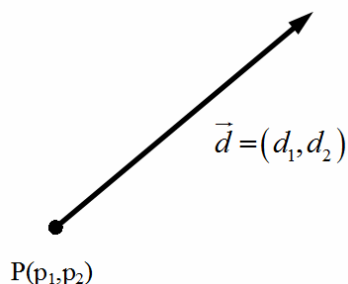
Deures: Pàg. 190: Ex. 4abc; Pàg. 206: Ex. 3, 4, 5 i 6; Pàg. 209: 50, 52.



5.2 Equacions d'una recta

Bàsicament per definir una recta necessitam dues coses:

- a) Un punt P pel que passa
- b) Un vector director, $\vec{d}$, que, com diu el nom, ens marcarà la direcció que segueix la recta.



Equacions de la recta i pas d'una a una altra:

<u>Equació vectorial:</u> $(x, y) = (p_1, p_2) + t(d_1, d_2)$	<u>Equacions paramètriques:</u> $\begin{cases} x = p_1 + td_1 \\ y = p_2 + td_2 \end{cases}$
<u>Equació contínua:</u> $\frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2}$	<u>Equació implícita o general:</u> $Ax + By + C = 0$ (A, B) és un vector perpendicular a la recta.
<u>Equació explícita:</u> $y = mx + n$ (m és el pendent i n l'ordenada a l'origen)	<u>Equació punt-pendent:</u> $y = y_0 + m(x - x_0)$ (x_0, y_0) és un punt pel que passa m és el pendent de la recta

Exemple 1: Escriu de totes les formes anteriors l'equació de la recta que passa pels punts A(-2,3) i B(-6,8)

Sol: $(x, y) = (-2, 3) + t(-4, 5); \quad \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 3 + 5t \end{cases}; \quad \frac{x+2}{-4} = \frac{y-3}{5}; \quad 5x+4y-2=0; \quad y = \frac{-5x}{4} + \frac{1}{2};$

$$y = 3 - \frac{5}{4}(x+2)$$



Exemple 2: Donada la recta $2x-3y=5$ escriu-la de totes les formes que s'han explicat. Troba'n també tres punts qualssevol.

Sol: $(1,-1); (-2,-3); (4,1); (x,y)=(1,-1)+t(3,2); \begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+2t \end{cases}; \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2}; -2x+3y+5=0;$

$$y = -1 + \frac{2}{3}(x-1)$$

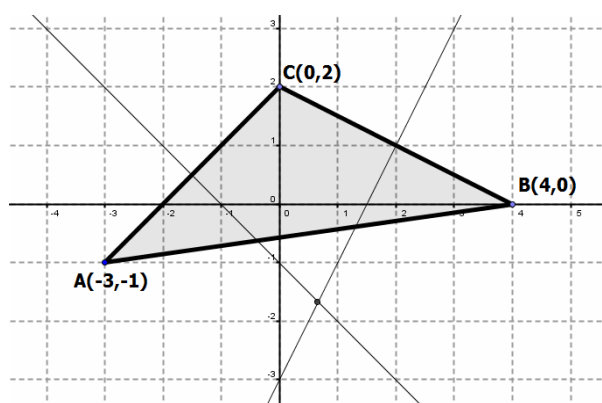
 Deures: Pàg. 193: Ex. 1, 2 i 3; Pàg. 206: Ex. 7ab, 8ab; 9ab; 10ab; 11ab; 12

Exemple 3: Troba l'equació de la mediatriu del segment A(1,5) i B(-3,7) expressant-la en forma contínua i general. Troba, a més, dos punts d'aquesta mediatriu.

Sol: $2x-y+8=0$

Exemple 4: Donat el triangle de vèrtexs A(-3,1), B(4,0) i C(0,2) troba'n el circumcentre.

Nota: Recorda que el circumcentre és el punt en el que es tallen les mediatris dels tres costats d'un triangle.



Sol: Mediatriu BC: $2x-y-3=0$; Mediatriu AC: $x+y+1=0$; Circumcentre: $(2/3, -5/3)$



5.3 Paral·lelisme i perpendicularitat de rectes

Depenent de la forma en la que tinguem expressada una recta seguirem una estratègia o una altra per saber si dues rectes són paral·leles o perpendiculars. Així ens podem fer les següents preguntes:

- Quan són **paral·leles** dues rectes?

a) Si tenen el mateix pendent

o

b) Si tenen vectors directores proporcionals

- Quan són perpendiculars dues rectes?

a) Si $m \cdot m' = -1$ (on m i m' són els pendents de les rectes)

Exemple: Si una recta té pendent $2/3$, una recta perpendicular a aquesta té pendent:

o

b) Si els vectors directores són perpendiculars.

Exemples:

A) Digues si les dues rectes següents són paral·leles, perpendiculars o cap de les dues coses:

$$r: 2x+3y-7=0 \quad s: \begin{cases} x=2-3t \\ y=5 \end{cases}$$

Sol: Cap de les dues.

B) Escribe una recta perpendicular i una altra paral·lela a la recta $r: 4x-7y+8=0$ que passin pel punt $(-2,3)$.

Sol: $(x,y)=(-2,3)+t(7,4)$; $(x,y)=(-2,3)+t(4,-7)$

C) Troba una recta perpendicular i una paral·lela a la recta $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2}$ que a més passin pel punt $(2,3)$. Escribe-les de totes les maneres que sàpigues.

Paral·lela:

$$\text{Sol. paral·leles: } (x,y)=(2,3)+t(3,-2); \quad \begin{cases} x=2+3t \\ y=3-2t \end{cases}; \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-2}; \quad 2x+3y-13=0;$$

$$y = \frac{-2x}{3} + \frac{13}{3}; \quad y = 3 - \frac{2}{3}(x-2)$$

**Perpendicular:**

Sol. perpendicular: $(x,y)=(2,3)+t(2,3)$; $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3+3t \end{cases}$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}$; $3x-2y=0$; $y=(3/2)x$;

$$y=3+\frac{3}{2}(x-2)$$

 Deures: Pàg. 197: Ex. 1, 3 i 4; Pàg. 206: 13a, 14a, 15a, 17 i 20

5.4 Posició relativa de dues rectes i intersecció de rectes

En el pla, dues rectes poden tallar-se o no. En cas que no es tallin diem que són **paral·leles** i en cas que es tallin podem tenir dos casos, que siguin la mateixa recta però expressades de formes diferents i en diem **coincidentes** o que només tinguin un punt en comú i en diem **secants**. Anem a veure com podem distingir aquests tres casos.

	COINCIDENTS	PARAL·LELES	SECANTS
Representació			
A partir del punt i del vector director	Vectors directores proporcionals. Punts comuns	Vectors directores proporcionals. Cap punt comú.	Vectors directores no proporcionals
A partir de les equacions implícites $Ax+By+C=0$ $A'x+B'y+C'=0$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

En cas que siguin secants, per obtenir-ne el punt de tall haurem de resoldre el sistema format per les dues equacions de les dues rectes.

Anem a veure'n millor uns quants **exemples**.

Exemple: Troba la posició relativa de les següents rectes i, en cas que es tallin, troba'n el punt de tall.

A) r: $2x+3y-4=0$; s: $(x,y)=(2,0)+t(6,-4)$

Sol: Coincidents.



B) $r: y=3x-2;$ $s: \frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{-6}$

Sol: Paral·leles

C) $r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5t \end{cases}$ $s: x=0$

Sol: Es tallen al punt (0,10/3)

D) $r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2}$

Sol: Es tallen al punt (8/3, 37/9)

E) Troba k de forma que les dues rectes següents siguin: **a)** Paral·leles; **b)** Perpendiculars. $r: 2x+ky+8=0$ $s: x+y-5=0$

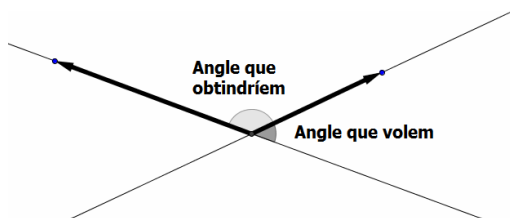
Sol: Per paral·leles: $k=2$; per perpendiculars: $k=-2$.

 Deures: Pàg. 199: Ex. 1; Pàg. 207: 25c, 26, 27, 29b



5.5 Angle entre dues rectes

L'angle format per dues rectes serà igual a l'angle que formin els seus vectors directores però considerant sempre un angle agut. Si per calcular l'angle que formen els vectors directores de la recta empram la fórmula vista al punt 4.4 podem obtenir angles majors que 90° . Per evitar-ho emprarem una petita "modificació" d'aquella amb la que sempre obtindrem l'angle agut.



$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

On $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ són els vectors directores de les rectes.

En cas que tinguem les rectes expressades en forma explícita o només en coneguem els pendents, existeix una altra fórmula que ens permet trobar l'angle que formen les rectes. És la següent:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

On α és l'angle que formen les rectes i m_1 i m_2 són els pendents de les rectes.

Exemple 1: Troba l'angle que formen les dues rectes següents de dues formes diferents: **a)** Trobant-ne els dos vectors directores; **b)** Trobant-ne els pendents.

$$r: y=2x-2; \quad s: \frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{-6}$$

Sol: Formen un angle de 45°

Exemple 2: Troba el valor de k de forma que l'angle que formin aquestes dues rectes sigui de 45° : $r: 2x+ky+8=0$ $s: 2x+y-5=0$

Sol: $k=6$ i $k=-2/3$



Deures: Pàg. 200: Ex. 1; Pàg. 208: 32, 33 i 34



5.6 Distància entre dos punts

Com sembla evident, la distància entre dos punts és igual al mòdul del vector que els uneix. Per tant, donats els punts $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ obtenim la següent fórmula:

$$d(P, Q) = |\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemple 1: Troba la distància entre els punts $A(1, -3)$ i $B(4, 5)$

Sol: $\sqrt{73}$ u

Exemple 2: Troba el valor de k de forma que els punts $A(2, 3)$ i $B(4, k)$ sigui 7.

Sol: $k_1 = 3 + \sqrt{45}$; $k_2 = 3 - \sqrt{45}$

5.7 Distància d'un punt a una recta

La distància del punt $P(a, b)$ a la recta $r: Ax + By + C = 0$ ve donada per la següent fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Exemple: Donades les rectes $r: 2x + 3y + 5 = 0$, $s: 4x + 6y - 2 = 0$ i el punt $P(2, -3)$, troba:

a) La distància del punt a la recta s .

Sol: $\frac{3\sqrt{52}}{13}$ u

b) Comprova si el punt pertany a cap de les dues rectes

Sol: Només a r .

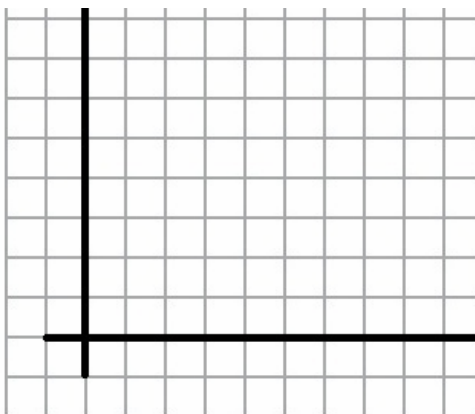
c) Comprova que les dues rectes són paral·leles



d) Troba la distància entre les rectes

Sol: $\frac{3\sqrt{52}}{13}$

Exemple 2: Donat el triangle de vèrtexs A(1,2), B(7,3) i C(3,6), troba'n el perímetre, els angles, l'àrea i digues de quin tipus és segons (equilàter, isòsceles, escalè).



Solucions: $P = \sqrt{37} + \sqrt{20} + 5$; $A = 11u^2$; és escalè; angles: $53^\circ 58' 21''$; $46^\circ 19' 56''$; $79^\circ 41' 43''$

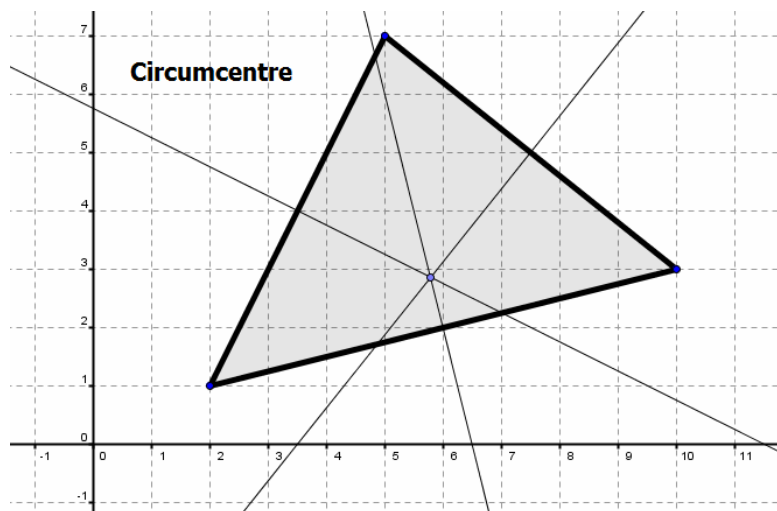


Deures: Pàg. 201: Ex. 1; Pàg. 208: 35a, 37, 40a, 41, 43, 44.

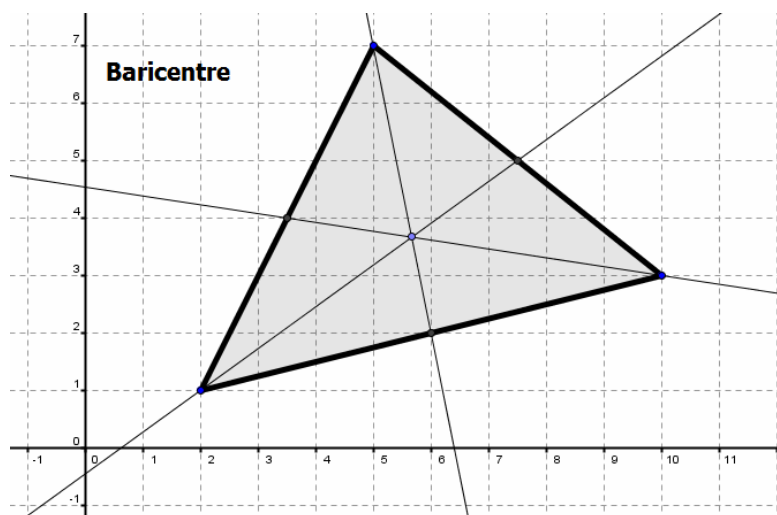


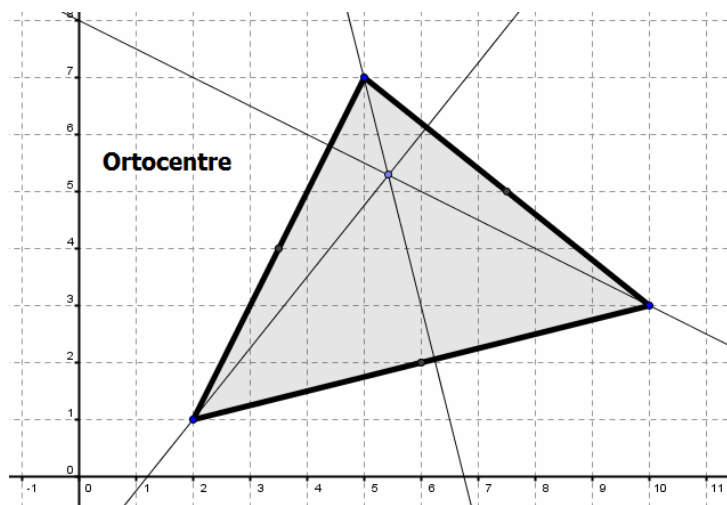
Súper-exemple final: Troba el circumcentre, el baricentre i l'ortocentre del següent triangle. Ves comprovant, sobre el dibuix, que els resultats que obtens són correctes.

Circumcentre:



Baricentre:



**Ortocentre:**

Sol: Circumcentre: $(81/4, 20/7)$; Baricentre: $(17/3, 11/3)$; Ortocentre: $(38/7, 37/7)$

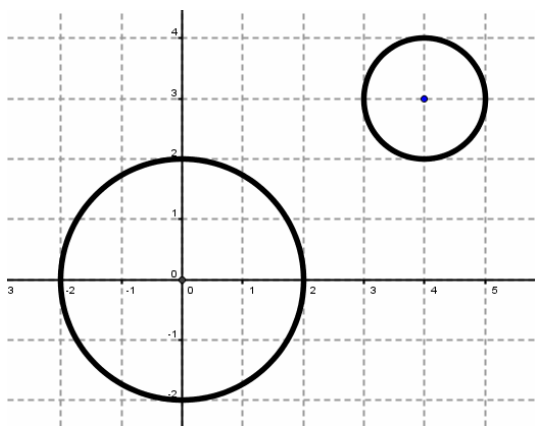
Deures: Pàg. 209: Ex. 64, 65, 71, **73**, 74, 75, 79 (a partir del dibuix), Pàg. 211: 87;

5.8 Equacions de la circumferència i l'el·lipse

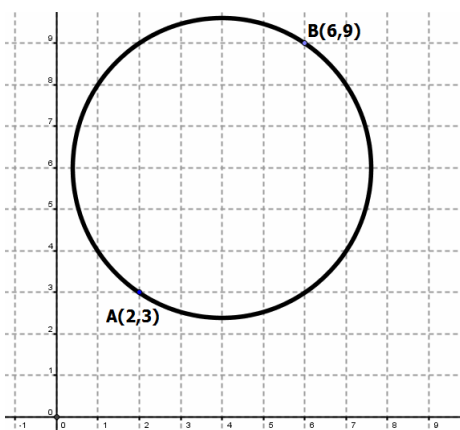
-Circumferència: Com tots sabem, es pot definir una circumferència com el lloc geomètric format per tots els punts que estan a distància constant d'un altre que s'anomena centre. A la distància a la que estan se l'anomena radi. Així, l'equació d'una circumferència de centre (A,B) i radi r ve donada per la següent equació:

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 = r^2$$

Exemples: Troba l'equació de les següents circumferències.

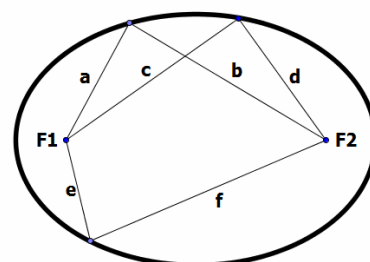


Sol: a) $x^2 + y^2 = 4$; b) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$

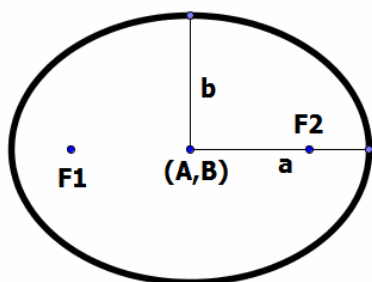


Sol: $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 13$

- **El·lipse:** Donats dos punts F_1 i F_2 anomenats focus, i una distància k , anomenada constant de l'el·lipse (sempre major que la distància entre els focus), s'anomena **el·lipse** al lloc geomètric dels punts P la suma de distàncies a F_1 i a F_2 dels quals és igual a k . És a dir: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = k$.



$a+b=c+d=e+f=k$

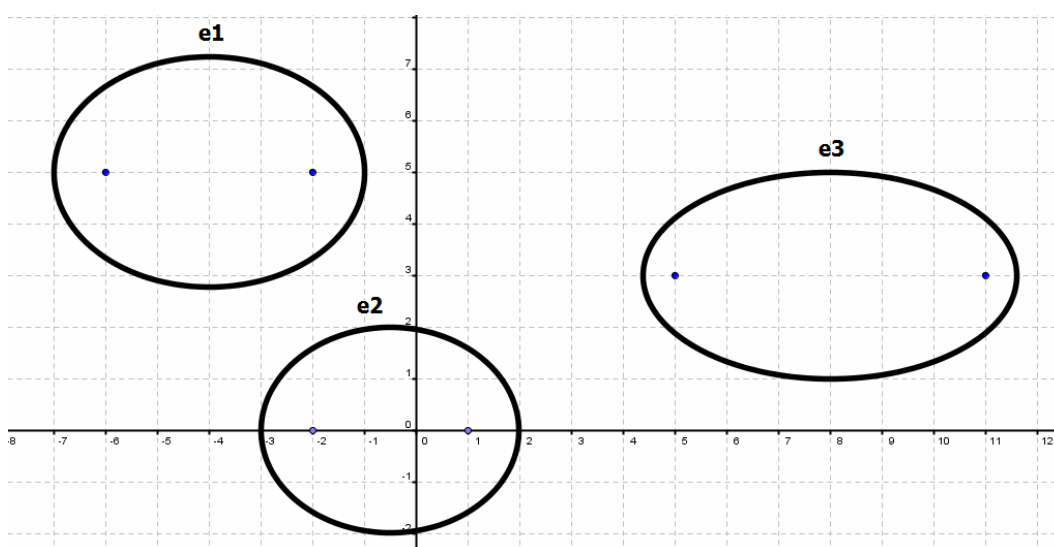


Així, l'equació reduïda d'una el·lipse de semieixos a i b , i centre (A, B) ve donada per:

$$\frac{(x-A)^2}{a^2} + \frac{(y-B)^2}{b^2} = 1$$

Exemples:

Troba les equacions de les següents el·lipses.



Sol: e1: $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-6)^2}{2 \cdot 25^2} = 1$; e2: $\frac{(x+0'5)^2}{6'25} + \frac{y^2}{4} = 1$; e3: $\frac{(x-8)^2}{12'25} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$



5.9 Autoavaluació

Els exercicis del llibre que es proposen per a preparar l'examen són els següents:

Pàgina 185: 1, 2ab, 3, 4, 5, 6, 7 i 9.

Pàgina 211: 1, 2, 3, 5, 6 i 7.

5.10 Aplicacions informàtiques i positius

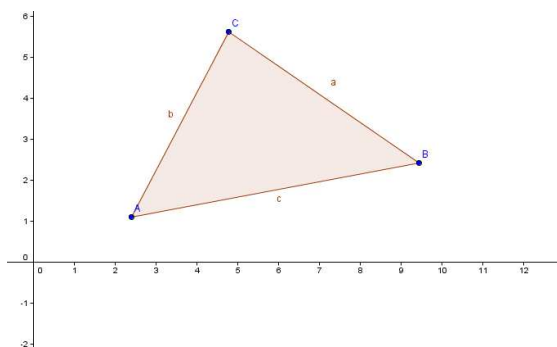
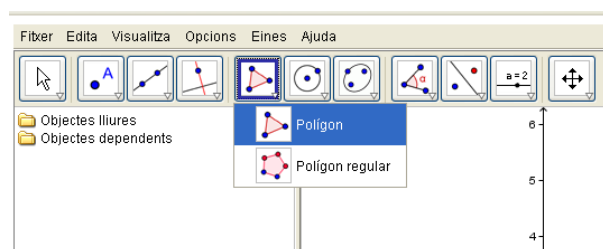
Amb aquests positius intentarem reproduir el que vam fer junts al punt 5.7. Dibuixarem un triangle i en trobarem els punts notables.

1) Has d'anar a la pàgina web: <http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html>

Veuràs que apareixen uns eixos de coordenades.

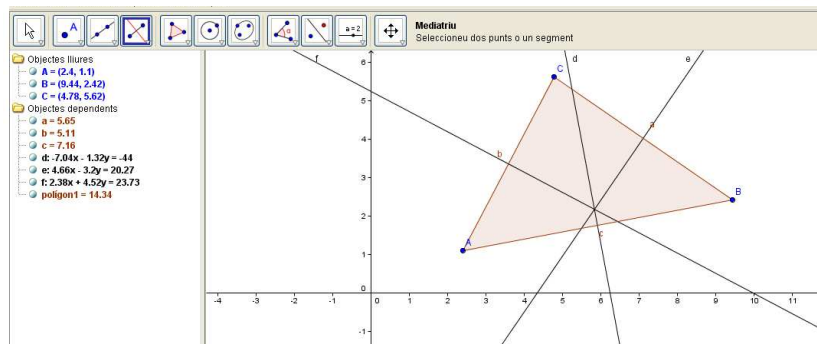
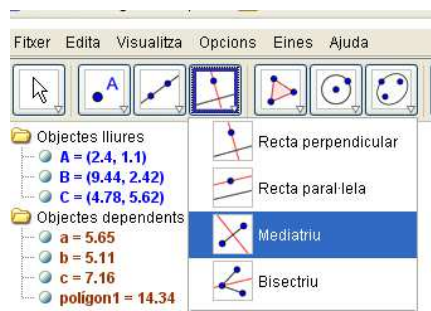
2) Ara has de dibuixar un triangle com i on vulguis. Ho podràs fer amb el botó que veus a la imatge de la dreta.

Una vegada seleccionat només has d'anar amb el ratolí damunt on vulguis posar cadascun dels tres vèrtexs del triangle a la part dels eixos de coordenades. Per acabar has de tornar a clicar damunt el primer vèrtex que hagi dibuixat. Et quedarà una cosa com la següent:



Circumcentre : Com saps, per trobar el circumcentre hem de trobar les tres mediatrises dels costats. Només has de seleccionar el botó "Mediatriu" i quan el tinguis seleccionat fer click amb el ratolí damunt del costat del que vulguis trobar-ne la mediatriu.

Et quedarà una cosa com la següent:



Com veus ja tenim les tres mediatrises i el circumcentre. Si t'hi fixes a l'esquerra hi apareixen les equacions dels punts, les mediatrises...



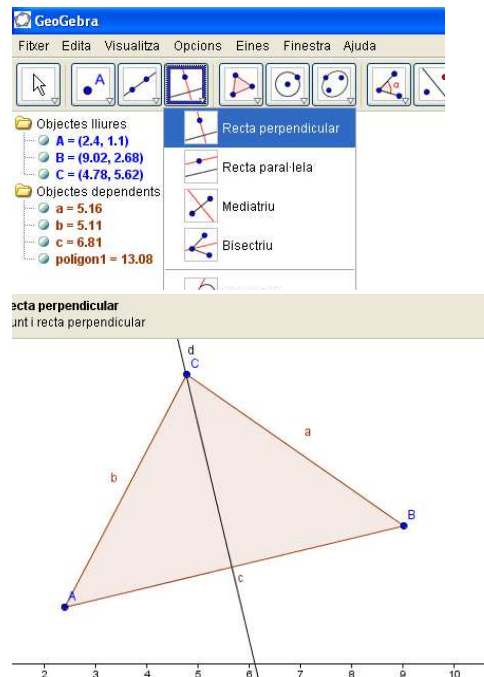
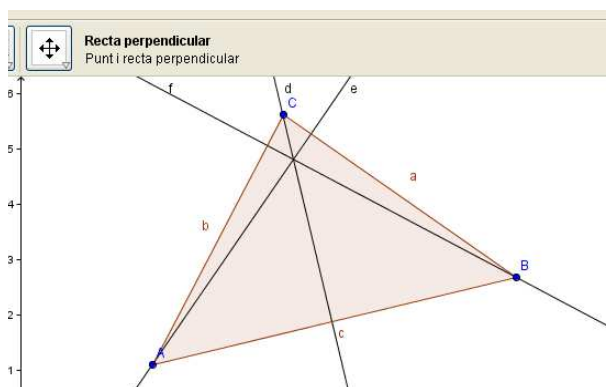
Ara només et queda guardar el que has fet en pdf, per exemple.

Per fer-ho has de seguir la següent ruta: Fitxer->Exporta->Construcció interactiva a pàgina web->pdf

Nota: També pots fer una captura de pantalla si t'és més còmode.

Ortocentre: Has de tornar a dibuixar el triangle (emprarem un triangle per cada punt notable). Una vegada el tenguís, farem una perpendicular a cada costat que passi pel vèrtex contrari. Seleccionarem el que pots veure a la figura de la dreta.

Aquesta opció ens fa una recta perpendicular a un costat que passa pel punt que noltros vulguem. Per tant, quan haguem fet clic en aquesta opció marcarem **primer** el costat i després el vèrtex contrari al costat i així ja tindrem la primera altura: Fent el mateix procés pels altres dos costats obtindrem les tres altures i per tant, l'ortocentre:



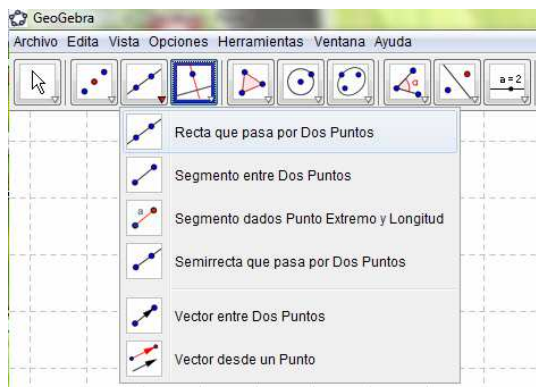
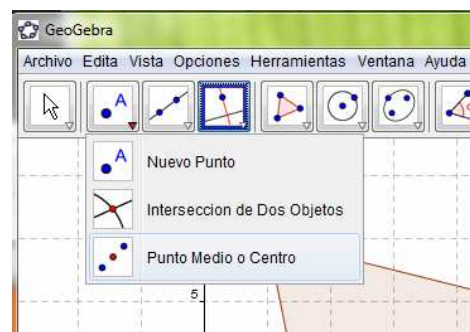
Baricentre:

Per trobar el baricentre hauràs de trobar primer el punt mitjà de cada costat del triangle. Per trobar-lo hauràs de seleccionar el que pots veure a la següent figura, PUNTO MEDIO O CENTRO.

I després marcar el costat del que en vols trobar el punt mig.

Hauràs de repetir el mateix pels tres costats.

Quant tenguís els tres punts mitjos dibuixats només has de fer les tres medians. Es a dir, una recta que passi per un dels vèrtexs i pel punt mig de l'altre costat i el mateix altres dues vegades pels altres dos costats:





Incentre: El punt de tall de les tres bisectrius dels tres angles s'anomena incentre. Investiga una mica com fer la bisectriu d'un angle, dibuixa les tres bisectrius dels tres angles i al seu punt de tall hi trobaràs l'incentre.

POSITIUS:

1r positiu: Dibuixa amb geogebra un triangle amb els vèrtexs als punts A(-2,1), B(3,2) i C(0,k) on

k= 4 pels nombres de llista de 1 a 5;

k=5 pels nombres de llista de 6 a 10;

k=6 pels nombres de llista de 11 a 15;

k=-2 pels nombres de llista de 16 a 20;

k=-3 pels nombres de llista de 21 a 25;

k=-4 pels nombres de llista de 26 a 30

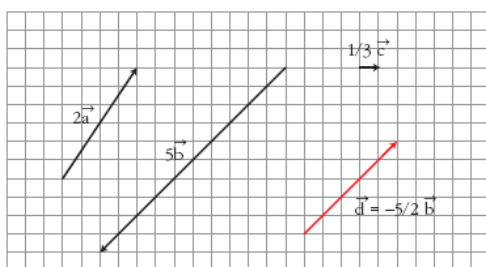
Troba el circumcentre, l'incentre, el baricentre i l'ortocentre amb el programa informàtic i envia una captura de pantalla per cadascun dels punts notables del triangle.

2n positiu: Troba el circumcentre i el baricentre del triangle analíticament i comprova que es troba situat on has vist amb el programa geogebra.

5.11 Solucions a les activitats del llibre

U7: VECTORS

Pàg 171:



$$\bullet \vec{d} = -2,5 \vec{b} = \frac{-5}{2} \vec{b}$$

$$\bullet \vec{a}(2, 3)$$

$$\vec{b}(-2, -2)$$

$$\vec{c}(3, 0)$$

$$\vec{d}(5, 5)$$

$$\bullet 2\vec{a} = 2(2, 3) = (4, 6)$$

$$5\vec{b} = 5(-2, -2) = (-10, -10)$$

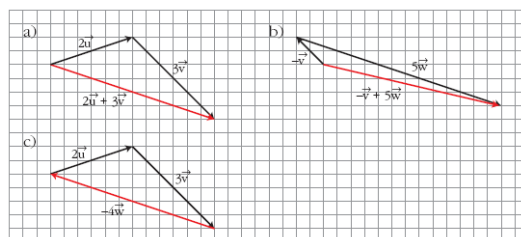
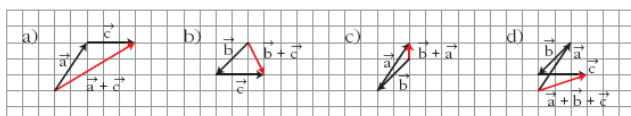
$$\frac{1}{3} \vec{c} = \frac{1}{3}(3, 0) = (1, 0)$$

$$a) \vec{a} + \vec{c} = (2, 3) + (3, 0) = (5, 3)$$

$$b) \vec{b} + \vec{c} = (-2, -2) + (3, 0) = (1, -2)$$

$$c) \vec{b} + \vec{a} = (-2, -2) + (2, 3) = (0, 1)$$

$$d) \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2, 3) + (-2, -2) + (3, 0) = (3, 1)$$



Pàg 175:

1) a) (-3,6); b) (-3,9); c) (-17/3,41/3); d) (-1,11/2)

Pàg 176:

1) a) $3\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{3}$ c) $-3\sqrt{3}$; d) $-45\sqrt{3}$; e) 16; f) $-9/4$

2) $97^{\circ}39'44''$

3) $3/2$; $65/2$

Pàg 178:

4) a) -15, -15; b) 5; $\sqrt{10}$, $161^{\circ}33'54''$; c) $k=4/3$; d) (4,3), (4/5,3/5), dos perpendiculars unitaris són: (4/5,3/5) i (-4/5, -3/5)

**Pàg 182 :**

1) Tenen mateix mòdul però diferent direcció; **b)** Mateixa direcció, sentit i mòdul; **c)** Mateixa direcció i sentit però el mòdul de BM és la meitat que el de DE; **d)** El mòdul de OS és menor que el de OE i són perpendiculars.

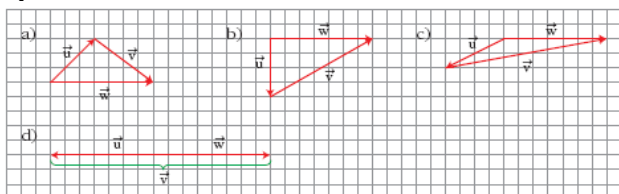
2) $NC=BN=FR=RE$; $AS=SF=CP=PD$

3) **a)** $CD=2CP$; **b)** $MN=(1/2)AC$; **c)** $OP=-OS$; **d)** $NB=(-1/2)BC$

4) **a)** $AF+BC=AE$ **b)** $AS+CC=SF$; **c)** $OP+SO=FD$; **d)** $AM+AM=AB$

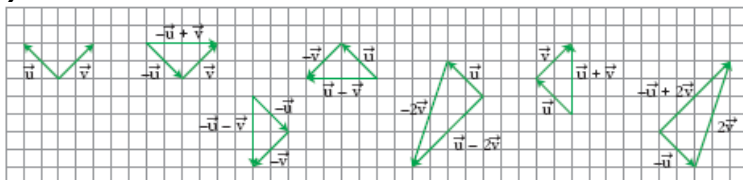
5) **a)** AC; **b)** $AB=DC$; **c)** $BA-CD$; **d)** $AA=0$; **e)** AC; **f)** $2DC$

6)



7) $b=x+y-z$; $c=x-y+z$

8)



$$-\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (1, -1)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$$

$$-\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1)$$

$$-\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2)$$

$$\vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2)$$

9) $u=(-1/2, 1/2)$; $v=(3/4, 1)$; $w=(3/2, 1)$

Pàgina 183:

10) $a=(2,2)$; $b=(0,-3)$; $c=(-1,0)$; $d=(-1,3)$

11) $(2,3)$

12) **a)** $(-7, 21/2)$; **b)** $(-9/5, 72/5)$; $(-17/6, 2)$

13) $b=(-20, 22)$

15) $a=5b-4c$

17) **a)** 2; **b)** -2; **c)** 4; **d)** -4

19) **a)** $k=2$; **b)** $k=30$; **c)** $k=-15/2$

21) Per ordre: $\sqrt{13}$; $\sqrt{13}$; 10; 1; 5; $\sqrt{2}$

23) $78^\circ 28' 34,6''$

25) **a)** -10; **b)** 3 i -3

26) **a)** $(3/5, -4/5)$; $(-3/5, 4/5)$; **b)** $(8,6)$, $(-8,-6)$; **c)** $(4/5, 3/5)$; $(-4/5, -3/5)$

14) $m=-5/4$, $n=-15/4$

16) **a)** Sí; **b)** No

18) **a)** -6; **b)** -13; **c)** 12

20) **a)** 22; **b)** 29; **c)** $(-15,-6)$; **d)** $(20,30)$

22) $m=4/5$; $m=-4/5$

24) **a)** $112^\circ 22' 48''$; **b)** 90° ; **c)** 135°

Pàgina 184:

27) $(-8,6)$ i $(8,-6)$

29) Dues solucions: $a=3$, $b=15/2$ i $a=-3$, $b=-15/2$

31) $k = \frac{\pm 10}{\sqrt{73}}$

33) Dues solucions: $u=(0,1)$ i $u=(4/5, -3/5)$

35) 7

37) $\sqrt{34}$ tots dos

39) 90°

28) $(-1/4, 3/4)$

30) $k=-4/3$, $k=-8/3$

32) Dues solucions: $k=8$ i $b=4$ o $k=-8$ i $b=-4$

34) $a=(-1/2)x+2y$; $b=(1/2)x+2y$; $c=(1/2)x-y$

36) $\sqrt{20}$

38) $\sqrt{2}$ tots dos

40) $4/3$ i $-3/4$



41) $-2'36''$; $20'82''$

42) Dues solucions: $(4'46'', 0'27'')$ i $(-2'46'', 3'73'')$

43) Dues solucions: $\left(\frac{-3}{2} - \sqrt{3}, -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ o $\left(\frac{-3}{2} + \sqrt{3}, -3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

44) $\frac{9\sqrt{10}}{5}$

45) $\frac{14\sqrt{29}}{29}$; $14/5$

46) 1

47) $(3,6)$ i $(2,-1)$

48) 120°

Pàgina 185:

50) Tots són nombres menys el b que és un vector

51) Sí No, Sí, No

52) 0, 90, 180 i 60

53) a) $\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}, \frac{\sqrt{26}}{26}\right)$ i $\left(-\frac{5\sqrt{26}}{26}, -\frac{\sqrt{26}}{26}\right)$; b) $(40/13, 8/13)$ i $(-40/13, -8/13)$

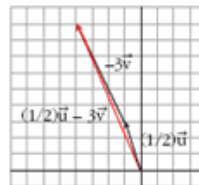
54) a) $AC=a+b$; $BD=-a+b$; b) $AC \cdot BD=0$

AUTOAVALUACIÓ

1)



$$\begin{aligned} \vec{u} + 2\vec{v} &= (-2, 6) + 2(1, -2) = \\ &= (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} &= \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) = \\ &= (-1, 3) - (3, -6) = (-4, 9) \end{aligned}$$

2) a) $1/2$; b) -3 ; c) $3/2$

3) $a=2u-3v$

4) a) $2\sqrt{3}$; b) 2, 2; c) 30°

5) a) $k=-2$; b) $k=4$, $k=-4$

6) Dues solucions: $(-1, \sqrt{3})$ i $(-1, -\sqrt{3})$

7) Dues solucions: $(-3,4)$ i $(3,-4)$

8) -3

9) 1 i $\sqrt{3}$

U8: GEOMETRIA ANALÍTICA. PROBLEMES AFINS I MÈTRICS

Pàg 189: 1) $MN=(-9,-6)$; $NM=(9,6)$

2) Hi estan

3) $k=-5/3$

Pàg 190: 4) a) $(11/2,4)$; b) $(13,-11)$; c) $(-2,19)$; d) $(5,5)$; e) $(4,7)$

Pàg 193:

1) a) $x-y=0$; b) $-4x-6y+24=0$; c) $y-5=0$; d) $x-3=0$

2) $2x-y+3=0$; Paramètriques: $x=t$, $y=3+2t$; Contínua: $(x-0)/1=(y-3)/2$

3) a) $(0,2)$ i $(-3,0)$ per exemple; c) $x=-3t$; $y=2-2t$; d) $y=(2/3)x+2$;

Pàg 194: 1) $(x+3)/11=(y-5)/-1$

2) $(x-4)/-10=(y-0)/4$

3) $32x-8y+7=0$

Pàg 197:

1) Paral·lela: $x=4-5t$; $y=-3+2t$; Perpendicular: $x=4+2t$, $y=-3+5t$

2) a) $(5,3)$; b) $-5/3$; c) $(-3,5)$

3) a) $(x-5)/3=(y+3)/1$; b) $3x+y-4=0$; c) $y=(1/3)x+1$

4) $5x-2y+23=0$; $2x+5y-14=0$

Pàg 199: 1) Paral·leles, secants, secants i paral·leles



Pàg 200: 1) a) $10^{\circ}18'17,45''$; b) $57^{\circ}31'43,71''$; c) $2^{\circ}43'34,72''$

Pàg 201: 1) $d(P,Q)=17$; $d(P,r)=3/5$; $d(P,s)=3$; $d(Q,r)=16/5$; $d(Q,s)=12$ 2) $24 u^2$

Pàg 206:

- 1) Sí, No, Sí 2) $k=-11/5$
 3) $B=(8,-7)$ 4) $(5,2)$
 5) $(2,2)$ 6) $(2,6)$
 7) a) $(x,y)=(-3,7)+k(4,-1)$; $x=-3+4t$, $y=7-t$; Punts: $(1,6)$; $(5,5)$; $(9,4)$, $(13,3)$; $(17,2)$
 b) $(x,y)=(-1,0)+k(0,2)$; $x=-1$, $y=2k$; Punts: $(-1,2)$, $(-1,4)$, $(-1,6)$, $(-1,8)$, $(-1,10)$
 8) a) $7x+6y-30=0$; b) $x-3=0$; c) $y=0$
 9) a) $x=t$, $y=2t$; b) $x=7$, $y=t$; c) $x=t$, $y=2$; d) $x=-3t$, $y=t$; e) $x=1+3t$, $y=-1+2t$; f) $x=-1+2t$, $y=1-t$
 10) a) $(x+1)/2=y/-3$; b) $(x-2)/0=y/3$; c) $x/1=(y+1)/-3$; d) $(x-2)/2=(y+1)/1$
 11) a) $x+2y-1=0$; b) $5x+y-3=0$; c) $y-2=0$; d) $15x+10y-4=0$
 12) a) $x=t$, $y=0$; b) $x=0$, $y=t$
 13) Per ordre, vector director, vector normal i pendent:
 a) $(2,5)$; $(-5,2)$; $5/2$; b) $(2,4)$; $(-4,2)$; 2 ; c) $(0,1)$, $(1,0)$, No en té. d) $(3,1)$, $(-1,3)$, $1/3$
 14) Pertany a la tercera i la quarta
 15) a) -1 ; b) 0 ; c) $5/2$

Pàgina 207:

- 16) a) $y=(-1/5)x-16/5$; b) $y=5x+15$
 17) a) $x=3+t$; $y=2-3t$; b) $x-1=y+3$; c) $y=-3$; d) $y=-3$
 18) $2x-3y-6=0$
 19) $3x-4y+8=0$
 20) a) $x=-3+2t$, $y=1$; b) $x=5-t$, $y=-2+2t$; c) $x=1+2t$, $y=3-3t$; d) $x=-3+4t$, $y=2-6t$
 21) a) $y=(2/3)x$; b) $y=(-3/2)x+7/2$
 22) a) $y=-2+m(x-3)$; b) $7x+4y-13=0$; c) $2x+y-4=0$; d) $5x-12y-39=0$
 23) $(1,-2)$ 24) $y=-2x+7$
 25) a) $(-3,-1)$; b) $(2,-1)$; c) $(2,-1/2)$ 26) $k=2$; $t=-1$
 27) $k=4$ 28) $k=-11/2$

Pàgina 208:

- 29) a) Paral·leles; b) Secants; c) Secants; 30) a) 45 ; b) 90 ; c) 45 ; d) $63^{\circ}26'5,82''$
 31) $56^{\circ}18'35,8''$ 32) $26^{\circ}33'54,2''$
 33) $n=-\sqrt{3}$ 34) $m=3$; i dues solucions per n : $n=30$ i $n=-6/5$
 35) a) $4\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{10}$ 36) $k=-2$
 37) $a=-5$ o $a=-1$ 38) $\frac{5}{2}\sqrt{5}$
 39) a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; b) $21/4$; c) $9/2$ 40) a) $12/5$; b) $9/2$; c) 3 ; d) 0
 41) $c=10$ o $c=-10$ 42) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$
 43) a) $2\sqrt{10}$; b) $\frac{10}{\sqrt{10}}$; c) $10u^2$ 44) $12'5u^2$
 45) $25u^2$

**Pàgina 209:**

46) $p: 7x-4y+9=0$; $s: x=2$; $r: y=-3/2$; $t: x+2y-1=0$

48) **a)** $5x-7y-18=0$; **b)** $6x-18y-12=0$; **c)** $5x-7y-6=0$

49) $6x-4y-5=0$

51) $(17/3, 0)$

54) $71/2$

56) Mediana: $\frac{\sqrt{65}}{2}$; Altura: $3\sqrt{528}$

58) Dos punts: $(3\sqrt{10}-8, 6\sqrt{10}-16)$ i $(-3\sqrt{10}-8, -6\sqrt{10}-16)$

59) $(1/8, 15/8)$; $(5/4, 3/4)$

61) $(-5/3, 3)$; $A=14'17''$

62) Dues rectes: $y=(-3/2)x+9/2$ i $y=(2/3)x-6/3$

64) Angles: $60^\circ 15' 18,4''$; $34^\circ 30' 30,7''$; $85^\circ 14' 11''$

47) -3

50) $(1/3, 2)$ i $(8/3, 3)$

53) $(-4/5, 8/5)$

55) $46/5$

57) $(8, 8)$

60) Dos valors: 9 i -21

63) Dos valors: $24+15\sqrt{3}$ o $9\sqrt{3}-12$

65) $29^\circ 44' 41,6''$; $46^\circ 13' 7,9''$; $104^\circ 2' 10,5''$

Pàgina 210:

66) Dues solucions: $y=\sqrt{3}x+2$; $y=-\sqrt{3}x+2$;

67) $y=3x+5/2$; $y=(-1/3)x+5/6$

68) $(-6, -6)$; $(2, -2)$

69) $y-2=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}(x+2)$ i $y-2=\frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}(x+2)$

70) $r: x-y+1=0$; Dues solucions a la segona recta: $x-y+7=0$; $x-5=0$

71) $(3, -3)$

72) $A=(0, 4)$; $C=(-6, -2)$; Àrea= $24u^2$

73) Ortocentre: $(21/11, 103/11)$; Circumcentre: $(1/22, -37/22)$

75) **a)** $(2, -4)$; $(-6, 0)$; **b)** $108^\circ 26' 5,8''$; $71^\circ 33' 54''$

77) $(-15, 0)$ i $(3/7, 0)$

79) $A=9/2 u^2$

81) Dues solucions: $(-9/2, -9)$ i $(-3/2, 3)$

83) $r: 18x+y+13=0$; $s: 15x+11y-40=0$

74) $(16/5, 8/5)$

76) $(0, 2)$; $(10/3, -4/3)$; $(8/3, 10/3)$

78) Dos punts: $(13/2, 3)$ i $(-11/2, -3)$

80) $A=21/2 u^2$

82) $3/4$

84) $2x+3y+5=0$

Pàgina 211:

87) **a)** Passa per $(0, 0)$; **b)** És una recta horitzontal; **c)** És una recta vertical

89) $B=(1, 1)$; $C=(-1, 4)$; $D=(-4, 2)$; longitud del costat: $\sqrt{26}$

90) Dues solucions: $C=(8, 4)$ i $D=(7, 0)$ o $C=(0, 6)$ i $D=(-1, 2)$

91) Perímetre= $16\sqrt{2}$; Vèrtexs: $(-1-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ i $(-1+2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

92) Dues solucions: $y=-2x+18$; $y=-2x-18$

93) Dues solucions: $D(1, 2)$ i $C(5, 6)$ o $D=(1/2, 3/2)$ i $C=(5/2, 7/2)$

AUTOAVALUACIÓ

1) **a)** $(1, 3)$; **b)** $k=-7$;

2) **a)** $x=3+5t$, $y=2+t$; $x-5y+7=0$; **b)** $y=-x/3$, $x/3=y/-1$

3) **a)** $5x-2y-16=0$; **b)** $2x+3y-6=0$;

4) $a(x-5)+b(y-1)=0$; $y=1$

5) **a)** Perpendiculars; **b)** secants;

6) $k=\sqrt{3}$; 7) **a)** 11, -1; **b)** $k=1$, $k=-3/2$