

Capítol 3

SÈRIES NUMÈRIQUES

Aquest capítol està dedicat a l'estudi de les sèries numèriques, és a dir, les successions obtingudes per addició ordenada d'una altra successió. El capítol es desenvolupa tractant de les sèries de nombres reals i, a l'últim apartat, es tracten les sèries de nombres complexos.

En el primer apartat es defineixen els conceptes bàsics i la terminologia més emprada habitualment; s'estableix el teorema de Cauchy i s'estudia la sèrie geomètrica. En el segon apartat s'estudien les propietats que resulten de la convergència d'una sèrie: condició necessària, suma i producte per un escalar i les associacions de termes. A l'apartat següent es tracten les sèries de termes positius i els criteris de convergència específics d'aquestes sèries. A continuació s'estudien les sèries alternades, la seva convergència i la metodologia general per aproximar la suma d'una sèrie alternada. L'Apartat 3.5 tracta la convergència absoluta i la seva relació amb la convergència ordinària, la convergència condicional i el producte de sèries.

3.1 CONCEPTE DE SÈRIE. CONVERGÈNCIA

Les sèries sorgeixen per donar resposta al problema de generalitzar el concepte de suma a un nombre infinit de termes. Aquesta “suma” requereix ser definida i estudiada, ja que no té les mateixes propietats que la suma habitual.

3.1.1 Consideri's la “suma infinita”

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots;$$

si es designa per A el valor de la suma i es considera que es poden aplicar totes les manipulacions

habituals per a la suma de nombres reals, com ara associar o commutar termes, aleshores es tindria:

$$\begin{aligned}
 A &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\
 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\
 &= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + \dots = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots) = \frac{1}{2}A,
 \end{aligned}$$

i per tant $A = 0$. D'altra banda, però, es compleix:

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \dots > 0.$$

Aquesta contradicció posa de relleu la importància de formalitzar de manera precisa el concepte de “suma infinita” i l'interès d'estudiar-ne les propietats. Això és el que es farà al llarg d'aquest capítol.

3.1.2 Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de nombres reals, per addició dels seus termes es pot definir una nova successió, notada (A_n) , mitjançant:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= a_0, \\
 A_1 &= a_0 + a_1, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

[1]

$$\begin{aligned}
 A_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

El parell de successions (a_n) i (A_n) s'anomena *sèrie associada a la successió (a_n)* i, per a cada $n \in \mathbb{N}$, a_n s'anomena *terme n -èsim* de la sèrie i A_n *suma parcial n -èsima* de la sèrie. És habitual designar la sèrie per $\sum_{n \geq 0} a_n$, o bé $\sum a_n$; a vegades s'escriu $\sum_{n \geq 1} a_n$ per comoditat de notació.

Si la successió de sumes parcials (A_n) és convergent, aleshores es diu que la successió (a_n) és *sumable*; el límit de la successió (A_n) s'anomena *suma de la sèrie* i s'escriu

$$[2] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

i en aquest cas, es diu que la sèrie $\sum a_n$ és *convergent*.

3.1.3 Exemple. La successió $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ no és sumable, ja que la successió de sumes parcials (A_n) és:

$$\begin{cases} A_{2p} = 0, & p \in \mathbb{N} \\ A_{2p+1} = 1, & p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

que no és convergent; dit altrament, la “suma infinita” : $1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$, no existeix.

3.1.4 Exemple. La successió $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ és sumable, ja que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

i per tant, la suma parcial n -èsima val:

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

que compleix $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 1$; en definitiva, es té:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

S'estudia a continuació una caracterització molt important de la convergència d'una sèrie.

3.1.5 Proposició. (*Condicció de Cauchy.*) Una condició necessària i suficient per a que una sèrie $\sum a_n$ sigui convergent és que, per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeixi un natural n_0 tal que

$$[3] \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Demostració:

La convergència de la sèrie és, per definició, la convergència de la successió de les sumes parcials, (A_n) . Observeu que la condició de l'enunciat no és més que la condició de Cauchy (2.5.1[7]) per a la successió (A_n) , ja que

$$|A_{n+p} - A_n| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}|.$$

Ara només cal tenir en compte les Proposicions 2.5.3 i 2.5.5, que asseguren que tota successió de Cauchy és convergent, i viceversa. ■

La condició de Cauchy és de gran importància teòrica; tanmateix, la seva utilitat pràctica per establir la convergència d'una determinada sèrie és molt poca, és a dir, és aplicable en poques ocasions.

3.1.6 Exemple. La sèrie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ és divergent, ja que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Per tant, per a $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ no es compleix la condició de Cauchy.

3.1.7 Si (a_n) i (b_n) són dues successions que difereixen en un nombre finit de termes; aleshores, en virtut de la Proposició anterior, les sèries $\sum a_n$ i $\sum b_n$ tenen el mateix caràcter, és a dir, són ambdues convergents o ambdues divergents.

Per acabar aquest primer apartat, s'estudia una sèrie molt important, anomenada sèrie geomètrica, que s'utilitzarà en algunes demostracions posteriors.

3.1.8 Exemple. Sèrie geomètrica.

Si $x \in \mathbb{R}$, la successió de potències naturals de x és $(1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots)$; això permet considerar la seva sèrie associada, $\sum x^n$, anomenada *sèrie geomètrica*, que té per sumes parcials:

$$[4] \quad X_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es tracta d'estudiar la convergència d'aquesta sèrie, segons el nombre real x . Amb aquest objectiu, si s'escriu:

$$\begin{aligned} X_n &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n \\ xX_n &= x + x^2 + \dots + x^{n+1} \end{aligned}$$

s'obté

$$X_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{si } x \neq 1.$$

Ara es pot estudiar el límit de la successió (X_n) segons el valor absolut de x :

1) si $|x| < 1$, aleshores $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$, de manera que $\lim X_n = \frac{1}{1-x}$ i per tant la sèrie geomètrica és convergent;

2) si $|x| > 1$, la successió (X_n) no és convergent, ja que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x^{n+1}| = \infty$;

3) si $x = 1$, aleshores $X_n = n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$, i el seu límit és $+\infty$;

4) si $x = -1$, es compleix

$$\begin{aligned} X_{2m} &= 0, & m \in \mathbb{N}, \\ X_{2m+1} &= -1, & m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

i per tant (X_n) no és convergent.

Resumint, la sèrie geomètrica $\sum x^n$, amb $x \in \mathbb{R}$, és convergent si, i solament si, $|x| < 1$, i en aquest cas la seva suma és:

$$[5] \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

3.2 PROPIETATS DE LA CONVERGÈNCIA

A l'Apartat anterior s'ha vist la definició de sèrie numèrica i s'ha caracteritzat la seva convergència amb la condició de Cauchy (Proposició 3.1.5). Aquest apartat estudia les conseqüències més importants que es poden deduir de la convergència d'una sèrie.

La primera propietat de les sèries convergents fa referència al límit de la successió de partida.

3.2.1 Proposició. (*Condició necessària de convergència.*) Si $\sum a_n$ és una sèrie convergent, aleshores $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demostració:

Immediata, prenent $p = 1$ a la condició de Cauchy.

També es pot veure directament a partir del fet que $a_n = A_n - A_{n-1}$, ja que llavors es té $\lim a_n = \lim A_n - \lim A_{n-1} = 0$. ■

Aquesta condició s'utilitza força sovint per demostrar la divergència d'una sèrie; així, la divergència de la sèrie $\sum (-1)^n$ de l'Exemple 3.1.3 es pot establir veient que la successió $((-1)^n)$ no té límit 0. És important observar que la condició no és suficient; un exemple típic és l'anomenada sèrie harmònica.

3.2.2 Exemple. S'anomena *sèrie harmònica* a la sèrie numèrica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. A l'Exemple 3.1.6 s'ha provat que aquesta sèrie és divergent; tanmateix, es compleix la condició necessària de convergència, ja que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

La propietat que s'estudia a continuació estableix un criteri de convergència d'una sèrie a partir del caràcter conegut (convergent o divergent) d'una altra sèrie.

3.2.3 Proposició. (*Criteri general de comparació.*)

- 1) Si $|a_n| \leq c_n$ per a tot $n > n_0$ i la sèrie $\sum c_n$ és convergent, aleshores la sèrie $\sum a_n$ també és convergent.
- 2) Si $a_n \geq d_n \geq 0$ per a tot $n > n_0$ i la sèrie $\sum d_n$ és divergent, aleshores la sèrie $\sum a_n$ també és divergent.

Demostració:

- 1) Es farà aplicant la condició de Cauchy. Com que $\sum c_n$ és una sèrie convergent, donat un

$\varepsilon > 0$ existeix $n_1 \geq n_0$ tal que

$$|c_{n+1} + \cdots + c_{n+p}| = c_{n+1} + \cdots + c_{n+p} < \varepsilon, \quad \forall n > n_1, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Aleshores, tenint en compte la condició de l'enunciat es pot escriure:

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq c_{n+1} + \cdots + c_{n+p} < \varepsilon, \quad \forall n > n_1, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Per tant, la sèrie $\sum a_n$ compleix la condició de Cauchy i aleshores és convergent.

- 2) Observeu que l'enunciat es pot aplicar només si $a_n \geq 0$. Per demostrar-lo, es procedirà per reducció a l'absurd: si $\sum a_n$ fos convergent, aplicant 1) ho seria també $\sum d_n$, la qual cosa és una contradicció. ■

3.2.4 Exemple.

- 1) La sèrie $\sum (-1)^n \frac{\sin n}{3^n}$ és convergent, ja que

$$\left| (-1)^n \frac{\sin n}{3^n} \right| \leq \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3} \right)^n,$$

i la sèrie $\sum \left(\frac{1}{3} \right)^n$ és una sèrie geomètrica convergent.

- 2) La sèrie $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ és divergent, ja que $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n} > 0$, per a tot $n \in \mathbb{N}$, i la sèrie $\sum \frac{1}{n}$ és divergent.

La proposició següent estudia la propietat que relaciona la convergència amb les operacions suma i producte per escalar dels termes de la sèrie.

3.2.5 Proposició. Si $\sum a_n$ i $\sum b_n$ són dues sèries convergents de sumes respectives A i B , i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores les sèries $\sum (a_n + b_n)$ i $\sum (\lambda a_n)$ són convergents i de sumes respectives $A + B$ i λA .

Demostració:

Si es designen per (A_n) , (B_n) i (C_n) les successions de sumes parcials de $\sum a_n$, $\sum b_n$ i $\sum (a_n + b_n)$ respectivament, aleshores $C_n = A_n + B_n$ i, per la Proposició 2.2.3, (C_n) és convergent i de suma $A + B$.

El raonament per a la convergència de (λA_n) es deixa al lector. ■

3.2.6 La qüestió no és tan immediata pel que fa al producte de sèries. Podria interessar conèixer la convergència de la sèrie $\sum (a_n b_n)$, però el seu estudi no és tan senzill com en el cas de la suma, ja que $a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \neq (a_0 + \cdots + a_n)(b_0 + \cdots + b_n)$, és a dir, fent servir

notacions anàlogues a les de la demostració anterior, en aquest cas resulta $C_n \neq A_n B_n$. Aquest tipus de sèries s'estudien a l'Apartat 3.5.

Si $\sum a_n$ i $\sum b_n$ són dues sèries numèriques, es defineix el producte d'ambdues com la sèrie $\sum c_n$ tal que

$$[6] \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

Tot i que aquesta definició recorda el mecanisme de multiplicació dels polinomis, tampoc ara no es pot afirmar que $C_n = A_n B_n$, i per establir la convergència de la sèrie $\sum c_n$ no n'hi ha prou amb que les sèries $\sum a_n$ i $\sum b_n$ siguin convergents; cal una condició addicional, tal i com es veurà a l'Apartat 3.5.

3.2.7 Sigui $\sum a_n$ una sèrie numèrica; si (n_j) és una successió estrictament creixent de nombres naturals, es pot definir la successió

$$[7] \quad \begin{aligned} b_0 &= a_0 + \cdots + a_{n_0}, \\ b_1 &= a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1}, \\ &\dots \\ b_j &= a_{n_{j-1}+1} + \cdots + a_{n_j}, \\ &\dots \end{aligned}$$

La sèrie $\sum b_j$ s'anomena una *associació* de la sèrie $\sum a_n$. La relació entre la convergència d'ambdues sèries s'estableix a la proposició següent.

3.2.8 Proposició. Si $\sum a_n$ és una sèrie convergent de suma A i $\sum b_j$ és una associació de $\sum a_n$, aleshores $\sum b_j$ és convergent i de la mateixa suma.

Demostració:

Les sumes parcials B_j compleixen

$$B_j = b_0 + \cdots + b_j = (a_0 + \cdots + a_{n_0}) + \cdots + (a_{n_{j-1}+1} + \cdots + a_{n_j}) = A_{n_j}$$

i, per tant, la successió (B_j) és una successió parcial de (A_n) que, en virtut de la Proposició 2.4.3, ha de tenir el mateix límit A . És a dir, $\sum b_p$ és convergent i de suma A . ■

3.2.9 La proposició anterior és una generalització de la propietat associativa de la suma, per a les sèries. Tanmateix, cal anar amb compte, ja que no es pot afirmar un enunciat recíproc per *dissociar* una sèrie, és a dir (mantenint notacions d'abans): si $\sum b_j$ és una associació convergent de $\sum a_n$, aleshores no es pot afirmar res sobre la convergència de $\sum a_n$. La raó és

coneguda: una successió no convergent pot tenir una parcial convergent. Per exemple, la sèrie $\sum_{n \geq 0} a_n = \sum_{n \geq 0} 3 \cdot (-1)^n$, es pot associar prenent la successió de naturals senars $(2j+1)_{j \in \mathbb{N}}$, de manera que resulta $b_j = 0$ per a tot $j \in \mathbb{N}$. La sèrie $\sum b_j$ és convergent, però en canvi $\sum a_n$ no ho és (no compleix la condició necessària).

Una observació final: subratllar que no existeix un resultat anàleg per a la propietat commutativa, el qual només s'obté sota certes restriccions: cal que la sèrie sigui absolutament convergent per tal que es pugui commutar l'ordre dels seus termes (vegeu l'Apartat 3.5).

3.3 SÈRIES DE TERMES POSITIUS

Aquest apartat estudia un tipus particular i força interessant de sèries numèriques, anomenades *de termes positius*; destaca el gran nombre de criteris de convergència específics per a aquestes sèries.

3.3.1 Si els termes d'una successió $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ compleixen la condició $a_n \geq 0$, per a tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores la sèrie $\sum a_n$ s'anomena *sèrie de termes positius*. Observeu que en aquest cas les sumes parcials A_n són positives i que la successió (A_n) és monòtona creixent, ja que $a_n = A_n - A_{n-1} \geq 0$, i per tant $A_n \geq A_{n-1}$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

A continuació comença l'estudi d'alguns criteris per establir la convergència d'aquest tipus de sèries numèriques.

3.3.2 Proposició. Una condició necessària i suficient per a que una sèrie de termes positius sigui convergent és que la successió de sumes parcials sigui fitada superiorment.

Demostració:

Si la sèrie és convergent, aleshores és fitada, segons la Proposició 2.2.2. Si la sèrie és fitada superiorment, com que és creixent, és convergent, en virtut de la Proposició 2.3.4. A més es compleix que la suma de la sèrie és el suprem del conjunt de sumes parcials. ■

3.3.3 Proposició. (*Criteri de comparació per pas al límit.*) Si $\sum a_n$ i $\sum b_n$ són dues sèries numèriques de termes positius tals que existeix el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \overline{\mathbb{R}},$$

aleshores es té:

- 1) si $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, les dues sèries tenen el mateix caràcter;
- 2) si $L = 0$ i $\sum b_n$ és convergent, aleshores $\sum a_n$ és convergent;
- 3) si $L = +\infty$ i $\sum b_n$ és divergent, aleshores $\sum a_n$ és divergent.

Demostració:

- 1) Si $\varepsilon > 0$, existeix un natural n_0 tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon, \quad \text{per a tot } n > n_0,$$

és a dir, $(L - \varepsilon) < \frac{a_n}{b_n} < (L + \varepsilon)$, i per tant $(L - \varepsilon)b_n < a_n < (L + \varepsilon)b_n$, per a tot $n > n_0$.

Si la sèrie $\sum b_n$ és convergent, també ho és $\sum (L + \varepsilon)b_n$ i, per comparació, la sèrie $\sum a_n$ és convergent. Anàlogament, si $\sum b_n$ és divergent, també ho és $\sum (L - \varepsilon)b_n$ i, per comparació, la sèrie $\sum a_n$ és divergent.

- 2) Si $L = 0$, aleshores per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix un natural n_0 tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon, \quad \text{per a tot } n > n_0,$$

és a dir $a_n < \varepsilon b_n$, per a tot $n > n_0$. D'aquí resulta immediatament la conclusió.

- 3) Si $L = +\infty$, aleshores per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix un natural n_0 tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| > \varepsilon, \quad \text{per a tot } n > n_0,$$

és a dir $a_n > \varepsilon b_n$, per a tot $n > n_0$. D'aquí resulta immediatament la conclusió. ■

3.3.4 Exemple. Sèries de Riemann o sèries harmòniques generalitzades.

S'anomenen *sèries harmòniques generalitzades* o *de Riemann*, les sèries numèriques:

$$[8] \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Ja s'ha vist que, per $\alpha = 1$, la sèrie corresponent és divergent.

Si $0 < \alpha < 1$, el criteri de comparació assegura que la sèrie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ és divergent, ja que $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ per a tot $n \geq 1$.

Finalment, si $\alpha > 1$, es veurà que la sèrie és convergent. Les sumes parcials d'aquesta sèrie són

$$H_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1,$$

de manera que (H_n) és una successió creixent. Només caldrà demostrar que té una parcial convergent per assegurar que és convergent. Considereu, doncs, la parcial

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^n)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}\right) = \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^n)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^\alpha}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = \sum_{k=0}^n (2^{1-\alpha})^k. \end{aligned}$$

En ser $\alpha > 1$, es té $0 \leq 2^{1-\alpha} < 1$, de manera que $(H_{2^{n+1}-1})$ està majorada per la suma parcial n -èsima d'una sèrie geomètrica convergent. En conseqüència, $(H_{2^{n+1}-1})$ és convergent.

3.3.5 Exemple. La sèrie $\sum \frac{2\sqrt{3n+1}}{\sqrt{5n^5+3n^3+1}}$ és convergent. Això es comprova comparant-la amb la sèrie harmònica generalitzada amb $\alpha = 2$:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\sqrt{3n+1}}{\sqrt{5n^5+3n^3+1}}}{\frac{1}{n^2}} = 2\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

És molt freqüent aplicar la Proposició 3.3.3 tot comparant la sèrie donada amb una sèrie harmònica convenient, tal com s'ha fet a l'Exemple anterior. Això dona lloc al proper criteri.

3.3.6 Proposició. (*Criteri de Pringsheim.*) Si $\sum a_n$ és una sèrie de termes positius i si existeix un nombre α tal que

$$[9] \quad L_p = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n \neq 0,$$

aleshores es compleix:

- 1) si L_p és finit i $\alpha > 1$, la sèrie $\sum a_n$ és convergent;
- 2) si $\alpha \leq 1$, la sèrie $\sum a_n$ és divergent.

Demostració:

Immediata, tenint en compte la Proposició 3.3.3 i l'Exemple 3.3.4, és a dir, per comparació amb la sèrie harmònica generalitzada. ■

3.3.7 Exemple. Considereu la sèrie $\sum \frac{3\sqrt{3n-5}}{\sqrt{7n^3-9n+6}}$. Si es calcula el límit

$$L_p = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{3\sqrt{3n-5}}{\sqrt{7n^3-9n+6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{3} n^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{7} n^{\frac{3}{2}}},$$

s'observa que $L_p = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ si $\alpha = 1$; per tant la sèrie considerada és divergent.

3.3.8 Proposició. (*Criteri de l'arrel o de Cauchy.*) Si $\sum a_n$ és una sèrie de termes positius i es considera el límit

$$[10] \quad L_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \in \overline{\mathbb{R}},$$

aleshores es compleix:

- 1) si $L_a > 1$, la sèrie $\sum a_n$ és divergent;
- 2) si $L_a < 1$, la sèrie $\sum a_n$ és convergent;
- 3) si $L_a = 1$, el criteri no permet afirmar res sobre el caràcter de la sèrie $\sum a_n$.

Demostració:

- 1) Si $L_a > 1$, existeix un nombre natural n_0 tal que

$$\sqrt[n]{a_n} > 1, \quad \text{per a tot } n > n_0;$$

per tant $a_n > 1$ per a tot $n \geq n_0$, de manera que $\lim a_n \neq 0$ i no es compleix la condició necessària de convergència.

- 2) Si $L_a < 1$ existeix un nombre real r tal que $L_a < r < 1$ i per tant existeix un natural n_1 tal que

$$\sqrt[n]{a_n} < r, \quad \text{per a tot } n > n_1;$$

és a dir, $a_n < r^n$ per a tot $n \geq n_1$, per tant, per ser $r < 1$, la sèrie $\sum a_n$ és convergent, ja que està majorada per una sèrie geomètrica convergent.

- 3) La sèrie $\sum \frac{1}{n}$ és divergent i la sèrie $\sum \frac{1}{n^2}$ és convergent, en virtut de l'Exemple 3.3.4, i tanmateix s'obté $L_a = 1$ per a ambdues sèries. ■

3.3.9 Exemple. La sèrie $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ és convergent, ja que, aplicant el criteri de l'arrel,

$$L_a = \lim \left(\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \right)^{1/n} = \frac{1}{2} < 1.$$

3.3.10 Proposició. (*Criteri del quocient o de D'Alembert.*) Si $\sum a_n$ és una sèrie de termes positius i si existeix el límit

$$[11] \quad L_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \overline{\mathbb{R}},$$

aleshores es compleix:

- 1) si $L_q > 1$, la sèrie $\sum a_n$ és divergent;
- 2) si $L_q < 1$, la sèrie $\sum a_n$ és convergent;
- 3) si $L_q = 1$, el criteri no permet afirmar res sobre el caràcter de la sèrie $\sum a_n$.

Demostració:

Ja ha estat demostrat que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L_q$$

aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L_q$$

(vegeu el Corol·lari 2.6.8). ■

3.3.11 Exemple. La sèrie $\sum \frac{2^n}{n}$ és divergent ja que, aplicant el criteri del quocient, resulta

$$L_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1.$$

Quan el criteri del quocient no permeti decidir sobre el caràcter d'una determinada sèrie (i per tant tampoc no ho pugui fer el criteri de l'arrel), pot ser útil aplicar el criteri que s'estableix a la proposició següent.

3.3.12 Proposició. (*Criteri de Raabe.*) Si $\sum a_n$ és una sèrie de termes positius i existeix el límit

$$[12] \quad L_r = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right), \quad (L_r \in \overline{\mathbb{R}}),$$

aleshores es compleix:

- 1) si $L_r > 1$, la sèrie $\sum a_n$ és convergent;

2) si $L_r < 1$, la sèrie $\sum a_n$ és divergent.

3) si $L_r = 1$, el criteri no permet decidir.

Demostració:

1) Si $L_r > 1$, per a cada $\varepsilon > 0$ existeix un natural n_0 tal que

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 + \varepsilon, \quad \text{per a tot } n > n_0,$$

és a dir

$$(n-1)a_n - na_{n+1} > \varepsilon a_n, \quad \text{per a tot } n > n_0.$$

S'escriuen unes quantes d'aquestes desigualtats:

$$\begin{aligned} n_0 a_{n_0+1} - (n_0+1)a_{n_0+2} &> \varepsilon a_{n_0+1} \\ (n_0+1)a_{n_0+2} - (n_0+2)a_{n_0+3} &> \varepsilon a_{n_0+2} \\ (n_0+2)a_{n_0+3} - (n_0+3)a_{n_0+4} &> \varepsilon a_{n_0+3} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(n_0+p-1)a_{n_0+p} - (n_0+p)a_{n_0+p+1} > \varepsilon a_{n_0+p},$$

on $p \in \mathbb{N}$, i sumant-les s'obté

$$n_0 a_{n_0+1} > n_0 a_{n_0+1} - (n_0+p)a_{n_0+p+1} > \varepsilon(a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p}),$$

per a tot $p \in \mathbb{N}$, és a dir

$$a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p} < \frac{n_0}{\varepsilon} a_{n_0+1}, \quad \text{per a tot } p \in \mathbb{N}.$$

La successió de sumes parcials és fitada superiorment i, per tant, (Proposició 3.3.2) la sèrie és convergent.

2) Si $L_r < 1$, existeix un natural n_1 tal que

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1, \quad \text{per a tot } n > n_1,$$

és a dir

$$(n-1)a_n - na_{n+1} < 0, \quad \text{per a tot } n > n_1.$$

Conseqüentment, la successió $((n-1)a_n)$ és creixent, i per tant, $\lim(n-1)a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, amb $l \neq 0$; aplicant el criteri de Pringsheim, resulta que $\sum a_n$ és divergent. ■

3.3.13 Exemple. Si es considera la sèrie $\sum \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$, aplicant el criteri del quocient s'obté

$$L_q = \lim \frac{\frac{(2(n+1))!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = 1,$$

i per tant no es pot afirmar res per aplicació del criteri del quocient ni pel criteri de l'arrel. Calculant ara el límit

$$L_r = \lim_n \left(1 - \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \right) = \lim_n \frac{n(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{1}{2} < 1,$$

es pot afirmar que la sèrie considerada és divergent, per aplicació del criteri de Raabe.

3.3.14 Observeu que es disposa ja d'una bona quantitat de criteris per establir la convergència d'una sèrie de termes positius; en canvi, no és tan senzill establir una metodologia per calcular la suma d'una sèrie. A l'apartat 3.1 s'ha vist una sèrie de la qual es pot calcular la suma quan existeix: la sèrie geomètrica; a continuació es mostren algunes tècniques de sumació de sèries, mitjançant dos exemples. En general, obtenir el valor de la suma d'una sèrie no és una feina fàcil, i molts cops s'opta per buscar valors aproximats, concretament, per aproximar la suma d'una sèrie pel d'una de les seves sumes parcials.

3.3.15 Exemple. Si $0 \leq |\lambda| < 1$, es tracta de calcular $\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n$ (comproveu que aquesta sèrie és convergent). La suma parcial n -èsima és

$$A_n = \lambda + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + \cdots + n\lambda^n,$$

i per tant

$$\lambda A_n = \lambda^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^4 + \cdots + n\lambda^{n+1}.$$

Restant membre a membre, s'obté

$$\begin{aligned} (1-\lambda)A_n &= \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^n - n\lambda^{n+1}; \\ A_n &= \frac{1}{1-\lambda}(\lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n) - n\frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n &= \lim A_n = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n - \lim \left(n\frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \right) = \frac{1}{1-\lambda} \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}. \end{aligned}$$

3.3.16 Exemple. Qualsevol sèrie de la forma

$$\sum \frac{1}{P(n)}, \quad \text{amb } P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_p n^p, \quad a_p \neq 0, \quad p \geq 2,$$

és convergent (criteri de Pringsheim). Es pot calcular la suma d'algunes d'aquestes sèries mitjançant la descomposició de la fracció racional $\frac{1}{P(n)}$ en suma de fraccions simples. Vegem-ne un cas concret: si $P(n) = n(n+1)(n+2)$, aleshores

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}.$$

Com que $a + b + c = 0$, en calcular les sumes parcials es van eliminant les fraccions

$$\frac{c}{(k-2)+2} + \frac{b}{(k-1)+1} + \frac{a}{k}, \quad \text{per a tot } n \geq 3,$$

i per tant es compleix:

$$A_n = \frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{n+1} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} = \frac{1}{4} - \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}.$$

Finalment, resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{4}.$$

3.3.17 Exemple. A l'Exemple 2.3.6 s'ha provat que la successió $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ és convergent i s'ha designat per e el seu límit. Es tracta ara de provar la igualtat

$$[13] \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

La convergència de la sèrie és immediata aplicant, per exemple, el criteri del quocient. Per establir el valor de la suma, es fa servir la igualtat següent:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Així s'obté la desigualtat

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!},$$

i per tant es complirà:

$$[14] \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}.$$

Per altra banda, de la igualtat inicial s'obté ara la desigualtat

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right),$$

per a tot m fixat, $m \leq n$, i aleshores es complirà:

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \geq \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \cdots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n} \right) \right) = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = \sum_{p=0}^m \frac{1}{p!}, \end{aligned}$$

per a qualsevol $m \in \mathbb{N}$, de manera que

$$[15] \quad e \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_0^m \frac{1}{p!} = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Les desigualtats [14] i [15] impliquen la igualtat [13].

3.4 SÈRIES ALTERNADES

Aquest apartat estudia breument unes sèries numèriques denominades *alternades* i els criteris de convergència que es poden aplicar de manera específica en aquest cas.

3.4.1 Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de nombres reals positius, aleshores s'anomenen *sèries alternades* les sèries numèriques

$$[16] \quad \sum (-1)^n a_n \quad \text{i} \quad \sum (-1)^{n+1} a_n$$

Observeu que la una és l'oposada de l'altra. Són exemples de sèries alternades:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}; \quad \sum (-1)^n \frac{2^n}{n!}; \quad \sum (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} 2^n.$$

Per a les sèries alternades existeix un criteri de convergència específic, que és l'establert a la proposició següent.

3.4.2 Proposició. (*Criteri de Leibniz.*) Si (a_n) és una successió monòtona decreixent i $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$, aleshores les sèries alternades [16] són convergents.

Demostració:

Si la sèrie alternada és, per exemple, $\sum (-1)^n a_n$, aleshores la suma parcial n -èsima és

$$A_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es poden considerar les successions parcials d'índex parell, $(A_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$; i d'índex senar, $(A_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$, i aleshores es compleix:

$$\begin{aligned} A_{2p} - A_{2p-2} &= a_{2p} - a_{2p-1} \leq 0, \quad \text{i per tant } A_{2p} \leq A_{2p-2}; \\ A_{2p+1} - A_{2p-1} &= -a_{2p+1} + a_{2p} \geq 0, \quad \text{i per tant } A_{2p+1} \geq A_{2p-1}. \end{aligned}$$

Observeu que s'ha aplicat la monotonia de (a_n) . Això prova que la successió (A_{2p}) és monòtona decreixent i que la successió (A_{2p+1}) és monòtona creixent; per tant s'ha de complir:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} (A_{2p}) &= L_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}; \\ \lim_{p \rightarrow \infty} (A_{2p+1}) &= L_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Però per hipòtesi, $(a_n) \rightarrow 0$ i, per tant, $\lim (A_{2p+1} - A_{2p}) = \lim_{p \rightarrow \infty} (a_{2p+1}) = 0$, és a dir, $L_1 = L_2 \in \mathbb{R}$, de manera que la sèrie $\sum (-1)^n a_n$ és convergent. El mateix resultat s'obté per a la sèrie $\sum (-1)^{n+1} a_n$, ja que és la oposada de la sèrie anterior. ■

Tal com s'ha dit a l'Apartat 3.3, és molt freqüent aproximar el valor de la suma d'una sèrie per una suma parcial adequada. El problema, en aquests casos, és tenir una fita de l'error comès en fer una tal aproximació. En el cas de les sèries alternades, és possible obtenir una fitació molt senzilla, en funció del terme general de la sèrie, tal com s'exposa a la proposició següent.

3.4.3 Proposició. Si la successió (a_n) compleix les condicions de la Proposició 3.4.2, aleshores

$$[17] \quad \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}, \quad \text{per a tot } n \in \mathbb{N}.$$

Demostració:

Si designem per A la suma de la sèrie, la demostració de la Proposició anterior mostra que A és major o igual que qualsevol suma parcial senar, i també que és menor o igual que qualsevol suma parcial parell; en resum, A es troba sempre entre dues sumes parcials consecutives qualssevol. En conseqüència, fent servir la mateixa notació d'abans, es té:

$$[18] \quad |A - A_n| \leq |A_{n+1} - A_n| = a_{n+1}, \quad \text{per a tot } n \in \mathbb{N}.$$

■

La fitació [18] serveix per saber, donada una certa tolerància, quina suma parcial cal determinar per obtenir el valor de la suma de la sèrie amb un error més petit. Més concretament, si ε és la tolerància o error màxim admès, només cal imposar $a_{n+1} < \varepsilon$ per garantir $|A - A_n| < \varepsilon$.

3.4.4 Exemple. La sèrie alternada $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ és convergent, ja que compleix les condicions del criteri de Leibniz. Per tal d'aproximar la seva suma amb un error menor que 0.05, cal saber quina suma parcial s'ha de calcular per tal de tenir l'aproximació desitjada:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < 0.05 \quad \text{si} \quad n+1 > \frac{1}{0.05} = 20,$$

per tant, cal calcular A_{20} . Llavors, $A_{20} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{20} = -0.66$ és el valor aproximat de la suma de la sèrie, amb un error més petit que 0.05.

3.5 CONVERGÈNCIA ABSOLUTA

Si $\sum a_n$ és una sèrie numèrica, hi ha una sèrie de termes positius molt directament relacionada amb ella: la sèrie $\sum |a_n|$. Aquest apartat tracta les interrelacions entre la convergència d'ambdues sèries i algunes de les conseqüències que se'n poden deduir.

3.5.1 Una sèrie numèrica $\sum a_n$ es diu *absolutament convergent* si la sèrie de termes positius $\sum |a_n|$, és convergent.

3.5.2 Exemple.

1) La sèrie $\sum (-1)^n \frac{1}{2^n}$ és absolutament convergent, ja que la sèrie de valors absoluts és una geomètrica convergent.

2) La sèrie $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ no és absolutament convergent, ja que la sèrie de valors absoluts és la sèrie harmònica.

La proposició següent estableix una primera relació entre la convergència i la convergència absoluta d'una sèrie.

3.5.3 Proposició. Si una sèrie és absolutament convergent, aleshores és convergent.

Demostració:

Es tracta d'aplicar el teorema de Cauchy (3.1.5), tenint en compte la convergència de la sèrie $\sum |a_n|$. Aleshores,

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| &\leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| = \\ &= ||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

i per tant $\sum a_n$ és convergent. ■

3.5.4 El segon cas de l'Exemple 3.5.2 posa de manifest que el recíproc de la proposició anterior no és cert, ja que la sèrie $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ és convergent (vegeu l'Exemple 3.4.4) i en canvi no és absolutament convergent. Una sèrie que compleix aquesta condició s'anomena *condicionalment convergent*. És a dir, una sèrie $\sum a_n$ és condicionalment convergent, quan la sèrie $\sum a_n$ és convergent però la sèrie $\sum |a_n|$ és divergent.

3.5.5 Hi ha dues altres sèries de termes positius relacionades amb una sèrie numèrica, que permeten caracteritzar la seva convergència absoluta: són les sèries $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ definides per

$$[19] \quad a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n \geq 0, \\ 0, & \text{altrament;} \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & \text{si } a_n < 0, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

És habitual anomenar aquestes sèries “la sèrie dels termes positius” i “la sèrie dels termes negatius” de $\sum a_n$, respectivament. La relació entre la convergència d'aquestes sèries i la de $\sum a_n$ s'estableix a la proposició següent.

3.5.6 Proposició. Una condició necessària i suficient per tal que una sèrie $\sum a_n$ sigui absolutament convergent és que les sèries $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ siguin convergents. Aleshores, es compleix:

$$[20] \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Demostració:

Noteu que es pot escriure

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{i} \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

de manera que, si $\sum a_n$ és absolutament convergent, aleshores són convergents les sèries $\sum |a_n|$ i $\sum a_n$ i, trivialment, també són convergents les sèries $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$.

Recíprocament, també es pot escriure

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-.$$

Així, si $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ són convergents, també ho és $\sum |a_n|$.

Per acabar, és evident que $a_n = a_n^+ - a_n^-$, de manera que $A_n = A_n^+ - A_n^-$, i d'aquí $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$. ■

3.5.7 L'estudi de la convergència absoluta d'una sèrie és molt interessant, ja que són moltes les tècniques per tractar amb sèries de termes positius. A més, la convergència absoluta, en ser una condició més forta de convergència, resulta molt potent, tal com es manifesta a les proposicions següents. En primer lloc es tracta un problema que restava pendent: el de la reordenació dels termes d'una sèrie.

3.5.8 Si σ és una bijecció de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ i $\sum a_n$ és una sèrie numèrica, s'anomena *reordenació de la sèrie* a la sèrie $\sum a_{\sigma(n)}$; la proposició següent mostra una propietat important de les reordenacions.

3.5.9 Proposició. (*Propietat commutativa de les sèries de termes positius.*) Si $\sum a_n$ és una sèrie de termes positius convergent, aleshores qualsevol reordenació $\sum a_{\sigma(n)}$ de $\sum a_n$ és convergent i té la mateixa suma.

Demostració:

Si es designa per A la suma de la sèrie $\sum a_n$, és obvi que les sumes parcials de la sèrie $\sum a_{\sigma(n)}$ estan fitades superiorment per A (ja que tots els termes són positius). Per tant, $\sum a_{\sigma(n)}$ és convergent i la seva suma B satisfà $B \leq A$.

D'altra banda, prenent l'aplicació inversa σ^{-1} , es pot considerar la sèrie $\sum a_n$ com una reordenació de $\sum a_{\sigma(n)}$, i un raonament anàleg a l'anterior permet afirmar que $A \leq B$. ■

Aquest resultat permet relacionar la convergència d'una sèrie qualsevol i la de les seves reordenacions.

3.5.10 Corol·lari. Si una sèrie és absolutament convergent, aleshores totes les seves reordenacions són convergents i tenen la mateixa suma.

Demostració:

Immediata, considerant les sèries $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ i aplicant la proposició anterior. ■

És important saber que, si una sèrie és condicionalment convergent, no només no es té la propietat anterior, sinó que és possible reordenar-la per tal d'obtenir una suma qualsevol.

3.5.11 Proposició. (*Teorema de Riemann sobre reordenacions.*) Si $\sum a_n$ és condicionalment convergent, per a cada $A \in \mathbb{R}$ és possible trobar una reordenació de $\sum a_n$ tal que $\sum a_{\sigma(n)} = A$.

Demostració:

En primer lloc, noteu que el fet que $\sum a_n$ convergeixi i $\sum |a_n|$ divergeixi fa que $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ divergeixin. En conseqüència, si es suposa $A > 0$, existeix un n_0 tal que

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n^+ > A \quad \text{mentre que} \quad \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n^+ < A.$$

A continuació és possible trobar un m_0 tal que

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n^+ - \sum_{n=0}^{m_0} a_n^- < A \quad \text{mentre que} \quad \sum_{n=0}^{n_0} a_n^+ - \sum_{n=0}^{m_0-1} a_n^- > A.$$

Es pot seguir procedint d'aquesta manera, i s'obté una sèrie

$$a_0^+ + \dots + a_{n_0}^+ - a_0^- - \dots - a_{m_0}^- + a_{n_0+1}^+ + \dots + a_{n_1}^+ - a_{m_0+1}^- - \dots - a_{m_1}^- + \dots$$

que no és més que una reordenació de $\sum a_n$. La sèrie així obtinguda és convergent i la seva suma és A , ja que està construïda de manera que, si anomenem

$$\begin{aligned} A_0^+ &= \sum_{n=0}^{n_0} a_n^+, & A_{k+1}^+ &= A_k^- + \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^+, \\ A_0^- &= A_0^+ - \sum_{n=0}^{m_0} a_n^-, & A_{k+1}^- &= A_{k+1}^+ - \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^-, \end{aligned}$$

es té

$$|A_k^+ - A| \leq a_{n_k}^+ \quad \text{i} \quad |A_k^- - A| \leq a_{m_k}^-.$$

Com que la sèrie $\sum a_n$ és convergent, la successió (a_n) té límit 0, i així també les successions $(a_{n_k}^+)$ i $(a_{m_k}^-)$, de manera que la nova sèrie té efectivament la seva suma igual a A . ■

A 3.2.6 s'ha definit el producte de dues sèries numèriques, però no s'ha establert cap criteri de convergència; aquesta qüestió es tracta al teorema següent.

3.5.12 Proposició. (*Teorema de Mertens.*) Si $\sum a_n$ i $\sum b_n$ són dues sèries numèriques i $\sum c_n$ la sèrie producte de les anteriors, definida segons 3.2.6, aleshores si les dues primeres sèries són convergents i de sumes respectives A i B i almenys una d'elles ho és absolutament, la sèrie producte és convergent i de suma AB . A més, si les dues sèries són absolutament convergents, el seu producte també ho és.

Demostració:

Suposeu que $\sum a_n$ és absolutament convergent. Si es designen per (A_n) , (B_n) i (C_n) les successions respectives de sumes parcials, es compleix $\lim(A_n) = A$ i $\lim(B_n) = B$. El

terme general C_n es pot escriure

$$\begin{aligned} C_n &= c_1 + \cdots + c_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_n + \cdots + a_n b_1) = \\ &= a_1(b_1 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 = \\ &= a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1 = \\ &= a_1(B + B_n - B) + a_2(B + B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B + B_1 - B) = \\ &= A_n B + (a_1(B_n - B) + a_2(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_1 - B)) = A_n B + r_n \end{aligned}$$

Es tracta de provar ara que

$$\lim r_n = \lim(a_1(B_n - B) + a_2(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_1 - B)) = 0.$$

En efecte: si $\overline{A}$ és la suma de la sèrie $\sum |a_n|$ (que és convergent per ser-ho $\sum a_n$ absolutament), la successió $(B_n - B)$ té límit 0 i per tant, per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix un natural n_0 tal que $|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(\overline{A} + 1)}$, per a tot $n > n_0$; d'altra banda, per a n_0 fix, existeix un n_1 tal que

$$|(B_1 - B)a_n + \cdots + (B_{n_0} - B)a_{n-n_0+1}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{per a tot } n > n_1,$$

ja que $(a_n) \rightarrow 0$ i hi ha un nombre finit de termes. Ara, es pot ja afirmar que, per a tot $n > \max\{n_0, n_1\}$,

$$\begin{aligned} |r_n| &\leq |(B_1 - B)a_n + \cdots + (B_{n_0} - B)a_{n-n_0+1}| + \\ &\quad + |(B_{n_0+1} - B)a_{n-n_0} + \cdots + (B_n - B)a_1| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(\overline{A} + 1)}(|a_{n-n_0}| + \cdots + |a_1|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

la qual cosa acaba la demostració de la primera part del teorema. Si les sèries $\sum a_n$ i $\sum b_n$ són ambdues absolutament convergents, aleshores la sèrie producte $\sum c_n$ és també absolutament convergent; en efecte, és suficient establir que la successió de sumes parcials $(|c_1| + \cdots + |c_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ és fitada, la qual cosa resulta immediatament:

$$\begin{aligned} |c_1| + \cdots + |c_n| &\leq |a_1||b_1| + (|a_1||b_2| + |a_2||b_1|) + \cdots + (|a_1||b_n| + \cdots + |a_n||b_1|) \leq \\ &\leq (|a_1| + \cdots + |a_n|)(|b_1| + \cdots + |b_n|). \end{aligned}$$

■

3.5.13 Exemple. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es tracta d'estudiar la convergència de la sèrie $\sum c_n = \sum \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!}$, provant que és la sèrie producte de dues sèries absolutament convergents. En efecte:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{n!} \left(\alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta + \cdots + \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k + \cdots + \beta^n \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^{n-k} \beta^k = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\beta^k}{k!} = \\ &= \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\beta}{1} + \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\beta^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha}{1} \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\beta^n}{n!}. \end{aligned}$$

Això prova que es compleix $\sum c_n = \left(\sum \frac{\alpha^n}{n!}\right) \left(\sum \frac{\beta^n}{n!}\right)$. Però les sèries numèriques $\sum \frac{\alpha^n}{n!}$ i $\sum \frac{\beta^n}{n!}$ són absolutament convergents (apliqueu, per exemple, el criteri del quocient) i, per tant, la sèrie producte és absolutament convergent.

3.5.14 En determinats casos, per a estudiar la convergència d'una sèrie $\sum \alpha_n$ és útil expressar el seu terme general com a producte de dos factors a_n i b_n , és a dir, escriure $\sum \alpha_n = \sum a_n b_n$, ($n \in \mathbb{N}$). Observeu que no es tracta d'un producte de sèries, tal i com s'ha definit a 3.2.6. Per a la convergència de $\sum a_n b_n$ s'ha de complir la condició de Cauchy, és a dir:

$$|a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \quad \forall p > 0.$$

Per això té interès poder escriure l'expressió $a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}$ de manera convenient; en concret, si s'escriu $B_n = b_1 + \cdots + b_n$, i tenint en compte que $b_n = B_n - B_{n-1}$, resulta:

$$\begin{aligned} a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p} &= a_n (B_n - B_{n-1}) + \cdots + a_{n+p} (B_{n+p} - B_{n+p-1}) = \\ &= -a_n B_{n-1} + (a_n - a_{n+1}) B_n + (a_{n+1} - a_{n+2}) B_{n+1} + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) B_{n+p-1} + a_{n+p} B_{n+p}, \end{aligned}$$

és a dir,

$$[21] \quad a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p} = a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_{n-1} + \sum_{r=0}^{p-1} B_{n+r} (a_{n+r} - a_{n+r+1}),$$

per qualsevol $n > n_0$ i $p > 0$. Aquesta expressió es coneix com la *fòrmula de sumació parcial d'Abel*.

Les proposicions que segueixen donen condicions per garantir que la suma $|a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}|$ pot ser tant petita com es vulgui, i per tant establir la convergència de $\sum a_n b_n$, mitjançant la fórmula d'Abel.

3.5.15 Proposició. (*Criteri de Dirichlet.*) Si (a_n) i (b_n) són dues successions tals que

i) les sumes parcials B_n de la sèrie $\sum b_n$ estàn fitades,

ii) la successió (a_n) és monòtona decreixent,

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$,

aleshores, la sèrie $\sum a_n b_n$ és convergent.

Demostració:

Per i) es compleix $|B_n| < K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Per iii), qualsevol que sigui $\varepsilon > 0$ existeix un natural n_0 tal que $a_n < \frac{\varepsilon}{2K}$, $\forall n > n_0$. Ara ja es pot aplicar la fórmula de sumació parcial d'Abel per a fitar la suma; en efecte:

$$\begin{aligned}
 |a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| &\leq \\
 &\leq |a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_{n-1} + \sum_{r=0}^{p-1} B_{n+r} (a_{n+r} - a_{n+r+1})| \leq \\
 &\leq |a_{n+p}| |B_{n+p}| + |a_n| |B_{n-1}| + \sum_{r=0}^{p-1} |B_{n+r}| |a_{n+r} - a_{n+r+1}| \leq \\
 &\leq K \left(a_{n+p} + a_n + \sum_{r=0}^{p-1} (a_{n+r} - a_{n+r+1}) \right) = \\
 &= K(2a_n) < 2K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \forall p > 0.
 \end{aligned}$$

Noteu que s'ha fet servir que $a_n \geq 0$ i que (a_n) decreix. ■

3.5.16 Exemple. Per estudiar la convergència de la sèrie numèrica $\sum \frac{\sin 2n}{n}$, es pot aplicar el criteri de Dirichlet, ja que si s'escriu el terme general de la sèrie com

$$\frac{\sin 2n}{n} = \left(\frac{1}{n} \right) (\sin 2n) = a_n b_n,$$

aleshores la successió (a_n) és monòtona decreixent i de límit 0 i la successió (b_n) compleix:

$$B_n = \sin 2 + \sin 4 + \cdots + \sin 2n = \frac{(\sin n)(\sin(n+1))}{\sin 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aquesta última afirmació es pot provar per inducció. El cas $n = 1$ és trivial; suposat cert per a un n qualsevol, s'ha de comprovar per a $n + 1$:

$$\begin{aligned}
 \sin(2n+2) &= 2 \sin(n+1) \cos(n+1) = \frac{2 \sin(n+1) \cos(n+1) \sin 1}{\sin 1} = \\
 &= \frac{2 \sin(n+1) \frac{1}{2} (\sin(n+2) - \sin n)}{\sin 1} = \frac{\sin(n+1) \sin(n+2) - \sin(n+1) \sin n}{\sin 1},
 \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
 \sin 2 + \sin 4 + \cdots + \sin 2n + \sin(2n+2) &= \\
 &= \frac{(\sin n)(\sin(n+1))}{\sin 1} + \frac{\sin(n+1) \sin(n+2) - \sin(n+1) \sin n}{\sin 1} = \\
 &= \frac{\sin(n+1) \sin(n+2)}{\sin 1}.
 \end{aligned}$$

Per tant es pot escriure:

$$|B_n| = |\sin 2 + \cdots + \sin 2n| \leq \frac{1}{\sin 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

és a dir, les sumes parcials B_n estan fitades. Això fa que es compleixin les tres hipòtesis del criteri de Dirichlet, i per tant, es pot afirmar que la sèrie numèrica considerada és convergent.

3.5.17 Proposició. (*Criteri d'Abel.*) Si (a_n) i (b_n) són dues successions tals que:

i) la sèrie $\sum b_n$ és convergent,

ii) la successió (a_n) és monòtona i fitada,

aleshores, la sèrie $\sum a_n b_n$ és convergent.

Demostració:

La successió (a_n) és fitada; per tant $|a_n| \leq K$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Supposeu, a més, que és decreixent. La sèrie $\sum b_n$ és convergent; aleshores, per la condició de Cauchy, donat $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad \forall n > n_0 \quad \forall p > 0.$$

Considereu la sèrie $\sum_{p \geq 0} b_{n+p}$, de sumes parcials $(B_{n+p})_{p \geq 0}$. Segons la fórmula d'Abel ([4]), per a cada $n > n_0$ i $p \geq 0$ es té:

$$\begin{aligned} |a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| &\leq \\ &\leq |a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_{n-1}| + \sum_{r=0}^{p-1} B_{n+r} (a_{n+r} - a_{n+r+1})| \leq \\ &\leq |a_{n+p}| |B_{n+p}| + |a_n| |B_{n-1}| + \sum_{r=0}^{p-1} |B_{n+r}| |a_{n+r} - a_{n+r+1}| < \\ &< \frac{\varepsilon}{4K} \left(|a_{n+p}| + |a_n| + \sum_{r=0}^{p-1} |a_{n+r} - a_{n+r+1}| \right) = \\ &= \frac{\varepsilon}{4K} \left(|a_{n+p}| + |a_n| + \sum_{r=0}^{p-1} (a_{n+r} - a_{n+r+1}) \right) = \\ &= \frac{\varepsilon}{4K} (|a_{n+p}| + |a_n| + a_n - a_{n+p}) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4K} (|a_{n+p}| + |a_n| + |a_n| + |a_{n+p}|) \leq \frac{\varepsilon}{4K} 4K = \varepsilon. \end{aligned}$$

és a dir, la sèrie $\sum a_n b_n$ compleix la condició de Cauchy i per tant és convergent. ■

3.5.18 Exemple. La sèrie $\sum \frac{1}{n 3^n}$ és convergent ja que, si s'aplica el criteri d'Abel i s'escriu

$$\frac{1}{n 3^n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = a_n b_n,$$

la successió (a_n) és monòtona convergent i la sèrie $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ és una sèrie geomètrica convergent.

3.6 SÈRIES DE NOMBRES COMPLEXOS

3.6.1 Si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de nombres complexos, anàlogament al cas en que la successió és real, es pot definir una nova successió $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme n -èsim definit per

$$[22] \quad S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

El parell de successions $(z_n), (S_n)$ s'anomena sèrie associada a la successió (z_n) i es designa per $\sum_{n \geq 0} z_n$ o bé $\sum z_n$; el nombre z_n s'anomena terme n -èsim de la sèrie i S_n suma parcial n -èsima.

El límit de la successió (S_n) , si existeix, s'anomena suma de la sèrie i s'escriu $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Anàlogament a les successions complexes, es pot relacionar fàcilment una sèrie complexa amb dues sèries reals, ja que si $z_n = a_n + b_n i, n \in \mathbb{N}$, aleshores la suma parcial n -èsima S_n val

$$\begin{aligned} S_n &= (z_0 + z_1 + \cdots + z_n) = \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_n)i = \\ &= A_n + B_n i \end{aligned}$$

i, en virtut de 2.1.7, la sèrie complexa $\sum z_n$ és convergent si, i només si, ho són les sèries reals $\sum a_n$ i $\sum b_n$; a més, es compleix

$$[23] \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)i$$

3.6.2 El concepte de convergència absoluta és vàlid també per a les sèries de nombres complexos: es diu que la sèrie $\sum z_n$ és absolutament convergent, si la sèrie $\sum |z_n|$, que és real i de termes positius, és convergent. La convergència absoluta de la sèrie complexa $\sum z_n$ es pot relacionar amb la de les sèries reals $\sum a_n$ i $\sum b_n$.

3.6.3 Proposició. Una condició necessària i suficient per tal que una sèrie complexa $\sum z_n = \sum (a_n + b_n i)$ sigui convergent, és que les sèries reals $\sum a_n$ i $\sum b_n$ siguin absolutament convergents.

Demostració:

Si $a_n = \Re z_n$ i $b_n = \Im z_n$ es sap que es compleix

$$|a_n| \leq |z_n| \text{ i } |b_n| \leq |z_n|, \quad n \in \mathbb{N}$$

Per tant, si $\sum |z_n|$ és convergent, aplicant el criteri de comparació (3.2.3) resulta la convergència de les sèries $\sum |a_n|$ i $\sum |b_n|$.

El recíproc és immediat, tenint en compte que

$$|z_n| = |a_n + b_n i| \leq |a_n| + |b_n|$$

i aplicant novament el criteri de comparació. ■

3.6.4 D'aquesta proposició es desprèn immediatament que si $\sum z_n$ és absolutament convergent, aleshores $\sum z_n$ és convergent. Així, doncs, l'estudi de la convergència d'una sèrie complexa es pot fer de dues formes diferents: la primera és a partir de les sèries reals corresponents a les parts real i imaginària del terme n -èsim de la sèrie; la segona és a partir de la convergència absoluta, especialment si és difícil obtenir les parts real i imaginària del terme n -èsim.

3.6.5 Exemple. Es considera la sèrie complexa $\sum \frac{1+2i}{2^n}$. El terme n -èsim de la sèrie és:

$$z_n = a_n + b_n i = \frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^n} i$$

Per tant la sèrie considerada és convergent, ja que les sèries reals associades són dues sèries geomètriques convergents. La suma de la sèrie serà:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2i}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2i \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} 2i = 2 + 4i$$

Per estudiar si la sèrie és absolutament convergent, s'ha de calcular:

$$|z_n| = \left| \frac{1+2i}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n} \sqrt{1+4} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Aplicant ara el criteri de l'arrel, s'obté:

$$L_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{5}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{\frac{1}{2n}}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

i per tant la sèrie és absolutament convergent.

Capítol 3: Exercicis

1. Si (a_n) és una successió de nombres reals,

a) demostreu que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ convergeix si, i només si, la successió (a_n) convergeix.

b) demostreu que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) = -a_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

c) fent servir els apartats anteriors, sumeu la sèrie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (1+n) \right)}{n (\ln n) \ln (n+1)^{n+1}}$.

2. Si $R(x)$ és una funció racional (és a dir, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ on $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis), digueu com és la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} R(n)$ segons els graus dels polinomis P i Q , fent servir els resultats coneguts sobre la sèrie harmònica.

3. Discutiu si són convergents o no les sèries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n};$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1};$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n};$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)};$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n;$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n};$

$$\text{e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}};$$

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2};$$

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!};$$

$$\text{h)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n};$$

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n};$$

$$\text{j)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2};$$

$$\text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}};$$

$$\text{p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$\text{q)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2};$$

$$\text{r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};$$

$$\text{s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n};$$

$$\text{t)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!};$$

$$\text{u)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)};$$

$$\text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2-1}.$$

4. Discutiu, segons el valor del nombre real a , la convergència de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$.

5. Demostreu la convergència de les sèries següents, i calculeu-ne la suma:

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)};$$

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$\text{c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1};$$

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)};$$

$$\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$$

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}};$$

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$$

$$\text{h)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2(n-1)(n+1)};$$

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}};$$

$$\text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n};$$

$$\text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1} n(n+1)};$$

$$\text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + \pi^n}{(e + \pi)^n}.$$

6. Fiteu l'error que es comet en aproximar $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ per la suma dels N primers termes. Calculeu, en particular, aquesta fita quan $N = 10$. Quants termes cal sumar per obtenir una aproximació amb un error menor que 10^{-10} ?

7. Trobeu a , b , i c de manera que per a tot $n \geq 3$ es compleixi

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{a}{(n-1)!} + \frac{b}{(n-2)!} + \frac{c}{(n-3)!},$$

i calculeu la suma de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ sabent que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

8. Sabent que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ i que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, calculeu la suma de:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2(n^2-1)};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}.$

9. Discutiu si són convergents o no les sèries següents i, si ho són, establiu quin tipus de convergència tenen (absoluta o condicional):

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}};$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100};$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{37}}{(n+1)!}.$

10. Demostreu que la sèrie $\sum (-1)^n \frac{1}{2n-1}$ és convergent. Estimeu l'error comès en aproximar la seva suma per la suma parcial S_9 . Quina suma parcial s'ha de fer per tal d'assegurar un error més petit que 10^{-3} ?

11. Quants termes s'han de sumar de les sèries següents, a fi d'obtenir el valor de la seva suma amb un error menor que 10^{-6} ?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}; & \text{c)} \quad \sum (-1)^n \frac{1}{n^2}; \\ \text{b)} \quad \sum (-1)^n \frac{1}{n}; & \text{d)} \quad \sum (-1)^n \frac{1}{n!}. \end{array}$$

12. Calculeu, amb un error més petit que una mil·lèsima, les sumes de les sèries

$$\sum \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)} \quad \text{i} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

13. Estudieu la convergència i la convergència absoluta de:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n}; & \text{c)} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)(\ln \ln n)}; \\ \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2) + (-1)^{n+1}(3/2)}{E((n+1)/2)}; & \text{d)} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)(\ln \ln n)^2}. \end{array}$$

14. a) Demostreu que si les sèries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergeixen, aleshores la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ és absolutament convergent.

b) Fent servir l'apartat anterior, demostreu que si la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergeix, aleshores la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ també convergeix.

15. Si $\sum u_n$ és una sèrie de termes positius divergent, demostreu que la sèrie $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ també divergeix.

16. Donada una sèrie de nombres reals positius, $\sum_{n \geq 1} x_n$, es defineix una nova sèrie, $\sum_{n \geq 1} y_n$, on

$$y_n = \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

Proveu que ambdues sèries tenen el mateix caràcter.

17. Si (x_n) és una successió decreixent de nombres positius, proveu que la sèrie $\sum_{n \geq 1} x_n$ és convergent si, i només si, la sèrie $\sum_{n \geq 1} 2^n x_{2^n}$ és convergent.

Aquesta propietat es coneix amb el nom de *criteri de condensació de Cauchy*. Apliqueu-la per estudiar el comportament de les sèries que tenen per terme general:

$$x_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha},$$

$$y_n = \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^\alpha},$$

on α és un nombre real arbitrari.

18. Si $(a_n)_{n \geq 0}$ és una progressió aritmètica de diferència d (és a dir, $a_n = a_0 + nd$) i $(b_n)_{n \geq 0}$ una progressió geomètrica de raó $r < 1$ (és a dir, $b_n = b_0 r^n$), proveu que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k b_n$ és convergent per a tot enter positiu k .

19. Demostreu que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix absolutament i (b_n) és una successió fitada, aleshores la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergeix absolutament.

20. Demostreu que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent, aleshores la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1 + a_n^2}$ és absolutament convergent. Apliqueu el resultat anterior per demostrar que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4 + \sin^2 n}$ és convergent.

21. Calculeu la suma de les superfícies dels rectangles $R_0, R_1, R_2, \dots$, on R_0 és el rectangle de costats 1 i $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, i R_n és el rectangle que s'obté en suprimir del rectangle R_{n-1} el quadrat de costat el més petit de R_{n-1} .

Capítol 3: Guia de Referències Bibliogràfiques

[Ap] APOSTOL, T.M.
Análisis Matemático.

Tot i que l'ordre en la presentació del tema no és exactament el mateix que el d'aquest capítol, aquest és un bon text per a la consulta i ampliació de coneixements. El capítol 8 ("Series infinitas y productos infinitos") inclou, a més del que s'ha explicat aquí, aspectes referits a sèries de nombres complexos, un breu tractament de les sèries parcials, l'estudi de la convergència de les sèries dobles i les reiterades i una introducció a la teoria dels productes infinits.

[Di] DIXMIER, J.
Matemáticas Generales.

Aquest llibre tracta conjuntament les sèries numèriques i les sèries de funcions, en el capítol 39. Comença pels conceptes generals i operacions elementals amb sèries; a continuació es tracten les sèries de termes positius i la convergència absoluta (estudiada amb certa extensió). Es dedica un apartat a l'estudi del producte de sèries i finalment s'estudien les sèries alternades. Els exercicis són interessants i de nivell alt.

[Gu] GUZMAN, M. DE i B. RUBIO
Análisis Matemático.

Aquest llibre està estructurat d'una forma una mica atípica, però la seva lectura pot ser força interessant per l'estudiant. El capítol 2 tracta les sèries numèriques (junt amb les successions); se n'estableixen les definicions bàsiques i alguns exemples interessants. El capítol 3 dedica un apartat a les sèries convergents, especialment les de termes positius. El capítol 4 tracta alguns mètodes de sumació i la fórmula de sumació d'Abel. Els exercicis proposats estan força ben seleccionats.

[Li] LINÉS, E.

Principios de Análisis Matemático.

El tema de les sèries de nombres reals s'aborda als capítols 9 ("Series numéricas") i 10 ("Convergencia absoluta y producto de series"). Com és norma d'aquest autor, el tractament és rigorós, detallat i complet. La presentació està estructurada de forma semblant en la d'aquest capítol i, a més, la situació relativa del tema dins el conjunt de l'obra és la mateixa.

[Or] ORTEGA, J.M.

Introducción a l'Anàlisi Matemàtica.

El capítol IX ("Sèries numèriques") té un esquema semblant al d'aquest capítol. Tanmateix, la seva inserció dins el conjunt del text és diferent, i en conseqüència presenta certes diferències. Per exemple, exposa el criteri que relaciona la convergència de certes sèries amb la convergència d'integrals impròpies, que aquí no es tracten fins al Capítol 12. Són interessants els apèndixs de mètodes de sumació i de productes infinits. Destaquen també els exercicis, ben seleccionats i que complementen molt bé els diferents temes.

[Spv] SPIVAK, M.

Calculus.

Tal com és habitual en aquest autor, el tractament de les sèries numèriques, que fa al capítol 22, és molt entenedor. Tot i que no és molt complet, la seva lectura pot ser un bon complement a aquest capítol, respecte del qual presenta algunes diferències, degudes essencialment a les relacions que estableix amb les funcions, que ha estudiat previamente.