



# EL LENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA



# EL LENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

Nom: Marc Serramià Amorós

Tutora: Reis Reig Castelló

Curs: 2n Batxillerat B

Institut: IES Martí l'Humà

Població i data: Montblanc, 7/7/2010

# ÍNDEX

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| -1.Introducció al tema                                                              | 4  |
| -2. Introducció al treball                                                          | 5  |
| -3. La proporció àuria                                                              | 6  |
| -3.1 Introducció a la proporció àuria                                               | 7  |
| -3.2 Explicació del nombre d'or                                                     | 8  |
| -3.2.1 On podem trobar la proporció àuria?                                          | 13 |
| -3.3 Estudi del nombre d'or en l'anatomia humana                                    | 18 |
| -3.4 Estudi del nombre d'or en les fulles de Pira i Montblanc                       | 19 |
| -3.5 Conclusions del nombre d'or                                                    | 26 |
| -4. Les fractals                                                                    | 27 |
| -4.1 Introducció a les fractals                                                     | 28 |
| -4.2 Explicació de les fractals                                                     | 29 |
| -4.3 Les fractals en la natura                                                      | 39 |
| -4.4 Estudi de la dimensió fractal de les muntanyes de Prades i Poblet              | 42 |
| -4.5 Estudi de la dimensió fractal dels contorns dels pobles de la Conca de Barberà | 64 |
| -4.6 Conclusions de les fractals                                                    | 73 |
| -5. Conclusions del treball                                                         | 75 |
| -6. Bibliografia                                                                    | 76 |
| -7. Agraïments                                                                      | 77 |
| -8. Annexos                                                                         | 78 |

# 1.INTRODUCCIÓ AL TEMA

“Les matemàtiques són l’alfabet amb el qual Déu ha escrit l’univers”

Galileo Galilei (1564–1642)

Quan contemplem la bellesa del nostre planeta tot ens sembla diferent, confús, ningú podria pensar que totes les coses mantenen semblances matemàtiques, que els objectes més caòtics segueixen els patrons més simples, que tots els humans compartim una proporció, que la disposició de les fulles de les plantes o de les llavors de gira-sol segueixen una successió numèrica.

En aquest treball de recerca es demostra que la natura més enllà de ser una agrupació de cèl·lules o diminuts àtoms, també conté nombres, mesures, proporcions i successions, es a dir matemàtiques, i s’explica no només amb paraules sinó que també amb estudis de flors, plantes, mapes i del propi cos humà.



## 2.INTRODUCCIÓ AL TREBALL

Aquest treball es basa en la recerca de les propietats matemàtiques que es poden trobar en la natura, si més no aquestes propietats són moltes, així que en aquest treball només se n'han estudiat dues: el nombre d'or i les fractals.

L'objectiu principal del treball és fer uns estudis d'aquests aspectes matemàtics en l'àmbit de la natura de la Conca de Barberà, per així determinar si s'hi manifesten o no.

La recerca s'ha dut a terme en 4 punts de la Conca i del Baix camp: Les muntanyes de Prades, les muntanyes de Poblet, els boscos i prats del terme municipal de Pira i els del terme municipal de Montblanc. En l'estudi de la dimensió fractal del contorn dels pobles de la conca també s'han estudiat les localitats de la Conca de Barberà que figuren en la llista de municipis de la Viquipèdia.

En el treball hi ha 4 estudis, 2 basats en el nombre d'or i 2 en les fractals. En el primer estudi es comprova que en el cos humà hi ha una proporció divina anomenada nombre d'or o proporció àuria. En el segon, també es tracta el tema de la proporció àuria, però en aquest cas el subjecte d'estudi no serà el cos humà, sinó algunes fulles d'arbres i plantes de la Conca de Barberà que s'han agafat l'atzar. En el tercer estudi abordarem el segon tema, les fractals, i comprovarem que més enllà de dibuixos caòtics són patrons que es poden trobar en àmbits com les muntanyes de Prades i de Poblet. I finalment, en el quart estudi, també analitzarem les fractals, però no pas d'una formació natural com les muntanyes, sinó de una formació artificial creada per l'home, com és el contorn dels municipis de la Conca de Barberà.

Així doncs, les hipòtesis d'aquest treball en forma de pregunta serien:

- 1.Hi ha una proporció divina en el cos humà que tothom comparteix?
- 2.Hi ha una proporció divina en les fulles dels arbres i plantes de la Conca de Barberà?
- 3.Tenen dimensió fractal les muntanyes de Prades?
- 4.Tenen dimensió fractal els contorns dels pobles de la Conca de Barberà?

### 3. La proporció àuria



$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## 3.1 Introducció a la proporció àuria

Quina relació mantenen les espirals d'una galàxia amb el posicionament de les llavors d'un gira-sol? El dissenyador de la targeta de crèdit va agafar un rectangle qualsevol per a crear-la? Els pintors pinten quadres sense seguir cap regla? L'home de Vitruvi és només un esbós de l'anatomia del cos humà?

Totes aquestes preguntes recauen sobre un mateix concepte, la proporció àuria, un nombre que durant tota la història ha estat present en les nostres vides sense que ens n'adonéssim. Des de la creació de les galàxies, les quals formen espirals logarítmiques que contenen el nombre d'or; l'evolució de l'especie humana fins a la que coneixem actualment, la qual també té unes característiques àuries que es poden observar en el dibuix de l'home de Vitruvi de Da Vinci; la construcció d'edificis amb planta àuria com el Partenó en l'època clàssica grega; algunes de les pintures més famoses, com la Mona Lisa o El naixement de Venus; fins i tot a l'actualitat, el DNI, o la targeta de crèdit estan creats a partir d'un rectangle auri.

El nombre d'or ens acompanya en el món, i en aquesta part del treball s'explica de què es tracta aquesta proporció i on la podem trobar, i a més a més es fa un estudi del nombre d'or en l'anatomia humana i un anàlisi del nombre d'or en unes fulles agafades a l'atzar a la Conca de Barberà.



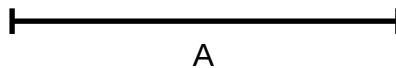
## 3.2 Explicació del nombre d'or

La proporció divina o nombre d'or es coneix amb la lletra grega  $\phi$  (Fi) i s'obté a través de l'operació:

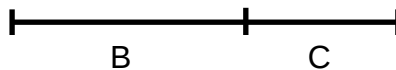
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887498948482045868...$$

I com es pot deduir per l' $\sqrt{5}$  del numerador, el nombre d'or és un nombre irracional,  $\Phi \in \mathbb{I}$ . Però, d'on prové aquest nombre i que té que no tinguin els altres? Doncs aquest nombre es el nombre que s'obté al dividir dues longituds molt particulars d'un segment, com es demostra a continuació:

Suposem un segment que anomenarem A d'una longitud desconeguda x



Dividim aquest segment A en dos segments, un de llarg anomenat B i un de més curt anomenat C tals que al dividir les longituds B i C s'obtingui el mateix nombre que al dividir el segment original A i el segment B, és a dir, que la longitud del segment total és a la part B com aquesta part B és a la part C



La igualtat és  $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$  si suposem que la longitud B=1 podríem conèixer la longitud A i per tant saber la proporció que han de mantenir els segments d'aquest tipus, d'aquesta manera la recta queda amb les següents longitud i la igualtat es converteix en una equació de segon grau:

$$\begin{array}{l} A = x \\ B = 1 \\ C = x-1 \end{array} \qquad \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Si resollem aquesta equació, trobarem dues solucions, una serà el nombre d'or i l'altre el nombre d'or negatiu, una solució no vàlida que es descarta perquè les longituds no poden ser negatives:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x(x-1) = 1 \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Podem dir doncs, que el nombre d'or es diferencia dels altres nombres perquè és la relació que tindran dos nombres quan la suma dels dos tingui la mateixa relació amb el nombre més gran. Així, dos nombres positius  $n$  i  $m$  mantenen una proporció àuria si es verifica  $\frac{n+m}{n} = \frac{n}{m}$

Per obtenir el nombre d'or, però també es poden fer servir altres mètodes com:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Ja que si l'elevem al quadrat obtenim l'equació original:

$$\Phi^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}} \Rightarrow \Phi^2 = 1 + \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

I al ser un nombre irracional i provenir d'una equació de segon grau del tipus  $x^2 - b - 1 = 0$  es pot expressar com la fracció contínua:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Ja que podem deduir que:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow (\Phi - 1) \cdot \Phi = 1 \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

El nombre d'or també té una relació amb una successió numèrica molt famosa, la successió de Fibonacci. En aquesta successió un terme  $a_n$  (on  $n$  és la posició del nombre en la successió i  $a$  és el nombre al que correspon aquesta posició) és la suma dels dos termes anteriors a aquest. L'expressió és:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Els primers termes d'aquesta successió són: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377...

Si dividim dos termes de la successió consecutius, de manera que el nombre major sigui al numerador i el menor al denominador, com més cap al final de la successió agafem els nombres, més tendeixen a  $\phi$  com es mostra a continuació:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} = 1 & \frac{3}{2} = 1,5 & \frac{8}{5} = 1,6 & \frac{21}{13} = 1,6153 \\ \frac{2}{1} = 2 & \frac{5}{3} = 1,666... & \frac{13}{8} = 1,625 & \frac{34}{21} = 1,6194 \end{array}$$

I quan anomenem  $k$  a la divisió de dos termes consecutius en la successió de tal manera que  $k = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  i en fem el límit quan  $n$  tendeix a infinit podem trobar:

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \right)^{-1} = 1 + (k)^{-1}$$

Si arreglem el resultat obtindrem l'equació original, per tant, la divisió de dos termes consecutius en la successió de Fibonacci quan la posició tendeix a infinit és exactament  $\phi$

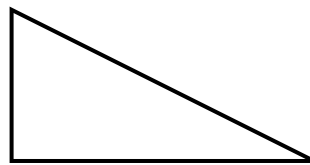
$$k = 1 + \frac{1}{k} \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0$$

El nombre d'or també es caracteritza per ser la proporció dels costats d'un rectangle especial, que es diferent de la resta, aquest és el rectangle auri.

En l'estudi sobre les fulles recollides a l'atzar a la Conca de Barberà s'han trobat fulles que contenen rectangles auris si es tracen línies seguint l'alçada i l'amplada d'aquestes.

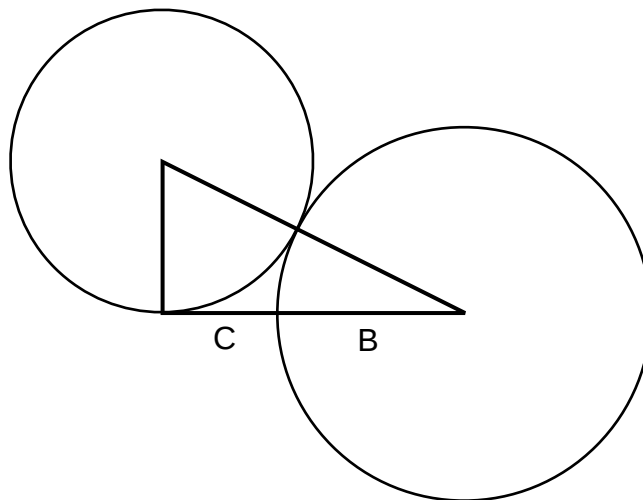
Per construir un rectangle auri dibuixem un segment que anomenarem A i que com al principi de l'explicació del nombre d'or haurem de dividir en dos, la part llarga B i la part curta C.

Per aconseguir dividir-lo de tal manera que A i B mantinguin la mateixa proporció que B i C, tracem un altre segment, de meitat de la longitud del segment A, i perpendicular a aquest per un extrem i unim l'extrem sobrant del segment A i l'extrem sobrant del nou segment que hem traçat de manera que es formi un triangle rectangle:

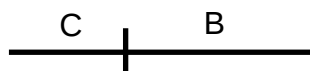


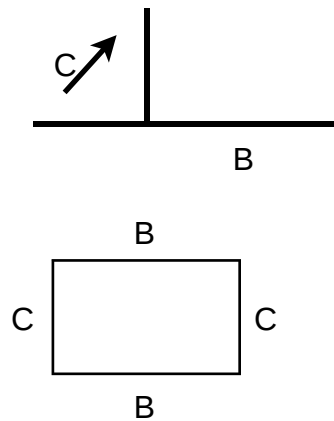
A

A continuació, punxem amb un compàs el vèrtex superior i amb la mina al vèrtex que forma noranta graus tracem una circumferència, seguidament punxem al vèrtex inferior que no forma noranta graus i amb la mina al punt de tall de la circumferència anterior i la hipotenusa tracem una nova circumferència. El punt on aquesta nova circumferència talli la recta A, serà el punt que dividirà A en B i C.

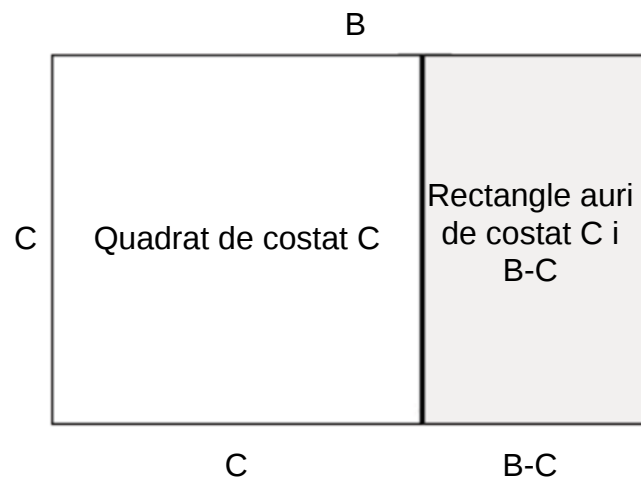


Si ara agafem la base del triangle i dobleguem el segment formant noranta graus just per el punt en que acaba C i comença B i amb línies paral·leles acabem de dibuixar el rectangle, haurem construït un rectangle auri.

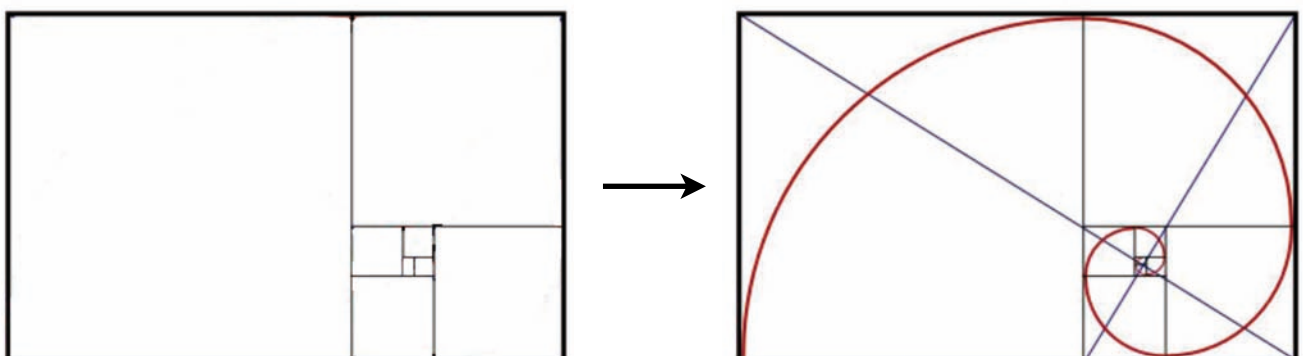




Aquest rectangle és auri, i per tant té unes propietats especials que el diferencien dels altres, una és que si a la base del rectangle fem un tall des d'un extrem fins a una longitud  $C$  i tracem una paral·lela a  $C$  per aquell punt obtindrem un quadrat de costat  $C$  i un nou rectangle auri que seguirà mantenint la proporció i que tindrà costats  $C$  i  $B-C$ .



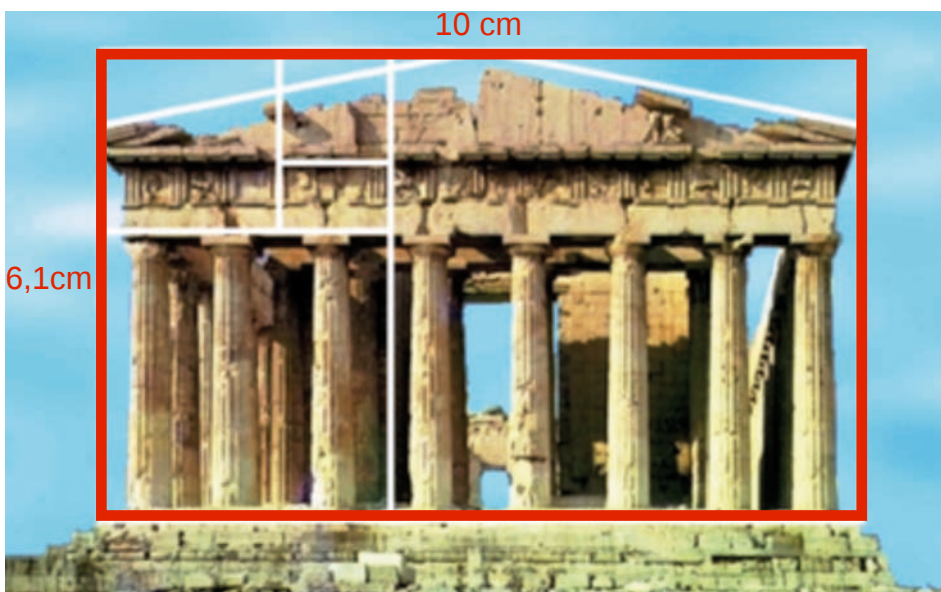
Una altra propietat és que si seguim fent aquest mètode fins a l'infinit i unim amb un quart de circumferència els vèrtex oposats de tots els quadrats obtindrem una espiral logarítmica.



### 3.2.1 On podem trobar el nombre d'or?

La proporció àuria és un dels nombres més estesos del món, el podem trobar en llocs naturals, com el cos humà, les fulles dels arbres, etc. Però, com que és considerat el nombre de la bellesa i la proporció perfecta també el podem trobar en molts llocs artificials, és a dir creats per l'home com edificis, pintures i objectes que utilitzem sovint.

En primer lloc veurem els llocs artificials, un dels primers monuments en tenir la proporció àuria, és el partenó de l'acròpolis de la ciutat d'Atenes. Aquest monument conté la proporció en la façana com mostra la il·lustració:



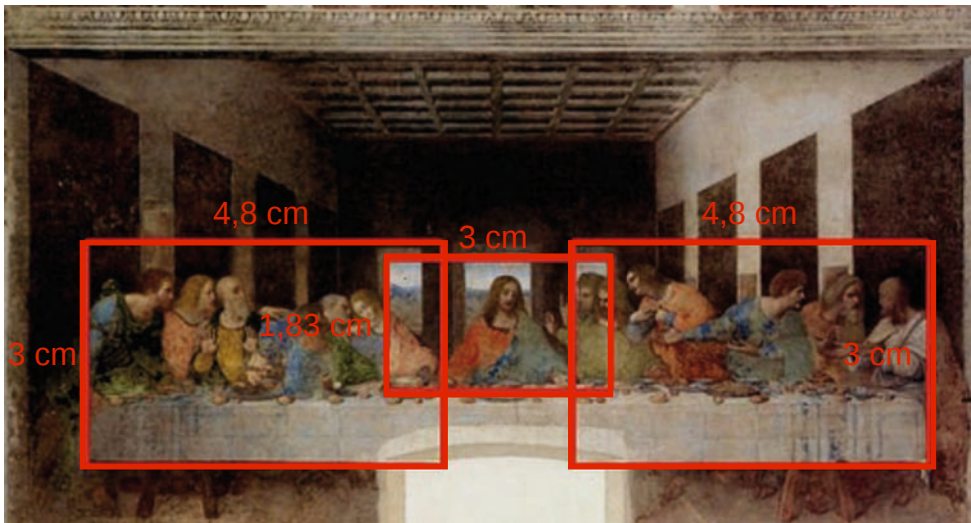
$$\frac{10}{6,1} = 1,639344... \approx \Phi$$

Un altre edifici que conté la proporció, és la seu central de l'ONU a Nova York, en aquest cas es pot veure clarament com la façana de l'edifici presenta un gran rectangle, la proporció del qual és  $\phi$ .



$$\frac{3,92}{2,4} = 1,6\widehat{3} \approx \Phi$$

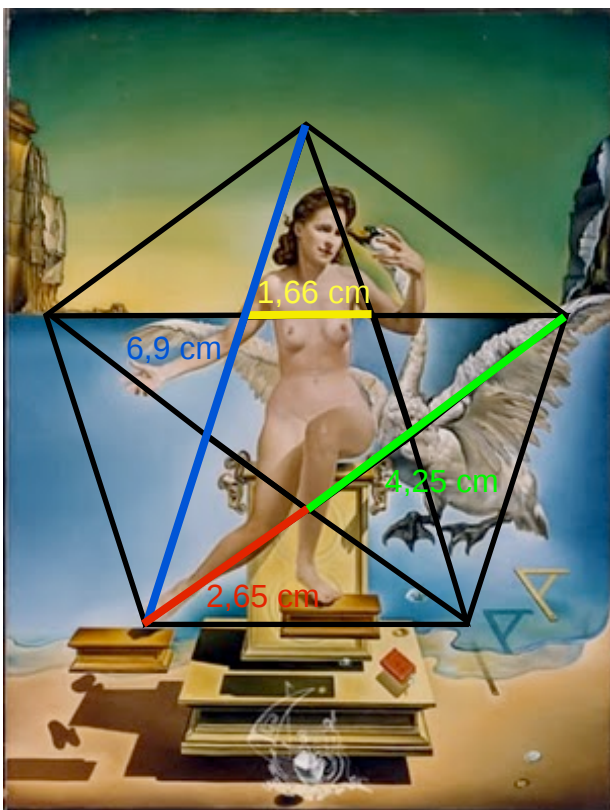
Molts altres edificis contenen la proporció àuria, però el nombre d'or també ha servit a molts pintors per a fer els seus quadres, com és el cas de Leonardo Da Vinci, en el seu quadre "L'últim sopar". Es poden veure tres rectangles auris formats per els personatges:



$$\frac{4,8}{3} = 1,6 \approx \Phi$$

$$\frac{3}{1,83} = 1,63934... \approx \Phi$$

Un altre quadre que presenta la proporció àuria és el quadre del pintor català Salvador Dalí "La Leda atòmica", aquest quadre es dedicat al coneixement matemàtic. Dalí amb l'ajuda del matemàtic Matila Ghyka va aconseguir introduir la proporció àuria de forma magistral en forma d'una estrella de 5 puntes molt particular com es mostra a continuació:



L'estrella es pot dividir en 4 segments diferents segons la longitud, de gran a petit: el blau, el verd, el vermell i el groc. Si fem la divisió entre les longituds blau/verd, verd/vermell i vermell/groc obtenim  $\phi$ :

$$\frac{6,9}{4,25} = 1,623529... \approx \Phi$$

$$\frac{4,25}{2,65} = 1,603773... \approx \Phi$$

$$\frac{2,65}{1,66} = 1,596385... \approx \Phi$$

Més enllà de l'arquitectura o l'art, el nombre d'or està molt present en les nostres vides. Un exemple són les targetes, com les de crèdit, el DNI o el carnet de conduir. Totes elles formen un rectangle auri.



$$\frac{8,1}{5,1} = 1,588235... \approx \Phi$$

Un altre exemple, també és un objecte que utilitzem molt sovint, és el bolígraf "Bic" de tota la vida. Si tapem el bolígraf i dividim la distància de l'extrem no tapat fins al principi del tap i la longitud de tot el tap, obtindrem  $\phi$ .



$$\frac{9,8}{6,1} = 1,606557... \approx \Phi$$

Els fumadors tenen en la seva mà durant molt de temps un paquet de cigarrets que casualment forma un rectangle auri. Potser per atreure clients?



$$\frac{5,4}{3,3} = 1,636363... \approx \Phi$$

Però el nombre d'or, ja existia molt abans que els grecs, que els pintors i que qualsevol persona, el nombre d'or també és present a la natura i a l'univers des de fa bilions d'anys. Un exemple són les galàxies, les quals formen formes i una gran quantitat d'elles formen espirals logarítmiques, espirals que com ja hem explicat estan molt relacionades amb  $\phi$ .



Aquestes espirals també apareixen en alguns animals com el cargol, el nàutil i en fòssils dels seus avantpassats.



Un altre lloc on apareix el nombre d'or és en les pinyes i en la disposició de les llavors del gira-sol i la margarida, en els tres casos es formen espirals, el nombre d'espirals horàries i el nombre d'espirals anti-horàries són dos termes consecutius en la successió de Fibonacci, i per tant la seva divisió és  $\phi$ .



8 espirals  
horàries

13 espirals  
anti-horàries

$$\frac{13}{8} = 1,625 \approx \Phi$$



34 espirals en  
sentit anti-horari

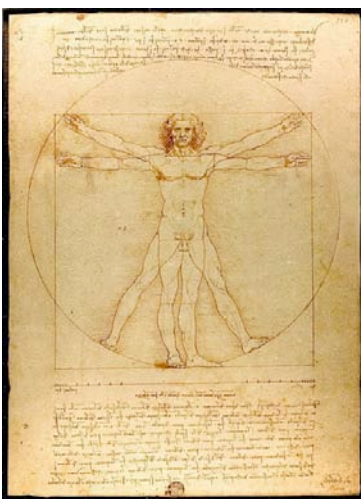
$$\frac{55}{34} = 1,617647... \approx \Phi$$

55 espirals en  
sentit horari

Un altre lloc on podem trobar el nombre d'or en la natura és en un rusc, ja que la raó entre el nombre d'abelles mascle i d'abelles femella és  $\phi$ .

També en els arbres on la relació entre la grossor del tronc i la de les rames que en surten també és el nombre d'or.

I fins i tot nosaltres duem a sobre el nombre d'or, ja que en el cos humà hi ha moltes proporcions àuries, com ja va dibuixar Leonardo Da Vinci en l'esbós de "*l'Home de Vitruvi*" on va marcar-ne algunes de elles.

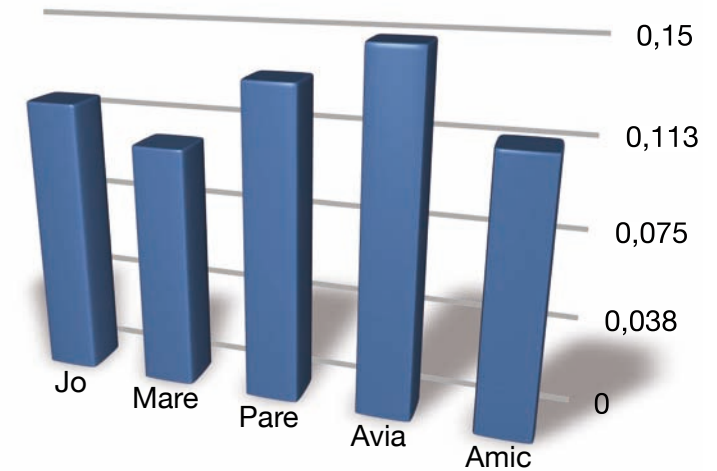


- La relació entre l'alçada total i l'alçada fins el melic.
- La relació de la longitud del braç i la longitud de la ma al colze
- La relació entre l'amplada i la llargada de la cara
- La relació entre la primera falange de la ma i la segona, i entre la segona i la tercera.
- La relació entre la longitud de la cama i la longitud del peu al genoll.
- La relació entre la longitud del colze al canell i del canell a la punta dels dits

Totes elles tenen la proporció àuria. A continuació s'exemplifica aquest fet amb un estudi d'algunes de les relacions esmentades fetes a cinc persones.

### 3.3 Estudi del nombre d'or en l'anatomia humana

| Nom:                           | Jo          | Mare        | Pare        | Avia        | Amic        |
|--------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Altura total                   | 179         | 170         | 172         | 163         | 171,7       |
| Altura del melic               | 111         | 102,5       | 99,4        | 97          | 96,5        |
| Divisió                        | 1,613       | 1,659       | 1,730       | 1,680       | 1,779       |
| Diferència amb $\Phi$          | 0,005421376 | 0,040502597 | 0,112348305 | 0,062378382 | 0,161240623 |
| -----                          | -----       | -----       | -----       | -----       | -----       |
| Llargada del braç              | 75          | 70,7        | 68          | 71          | 73,8        |
| Llargada del colze fins dits   | 48          | 43,7        | 43,5        | 44,7        | 43          |
| Divisió                        | 1,563       | 1,618       | 1,563       | 1,588       | 1,716       |
| Diferència amb $\Phi$          | 0,055533989 | 0,000185018 | 0,054815598 | 0,029667098 | 0,098245081 |
| -----                          | -----       | -----       | -----       | -----       | -----       |
| Llargada de la primera falange | 5,5         | 5           | 5,3         | 5,2         | 4,4         |
| Llargada de la segona falange  | 3,3         | 3,2         | 3,4         | 3,4         | 2,7         |
| Divisió                        | 1,667       | 1,563       | 1,559       | 1,529       | 1,630       |
| Diferència amb $\Phi$          | 0,048632678 | 0,055533989 | 0,059210459 | 0,088622224 | 0,011595641 |
| -----                          | -----       | -----       | -----       | -----       | -----       |
| Llargada de la cara            | 23          | 23,5        | 24          | 23          | 20,8        |
| Amplada de la cara             | 12,5        | 13          | 14          | 12          | 13          |
| Divisió                        | 1,840       | 1,808       | 1,714       | 1,917       | 1,600       |
| Diferència amb $\Phi$          | 0,221966011 | 0,189658319 | 0,096251726 | 0,298632678 | 0,018033989 |
| -----                          | -----       | -----       | -----       | -----       | -----       |
| Llargada de la cama            | 101,5       | 99          | 98          | 96          | 95          |
| Llargada del peu al genoll     | 54          | 53,5        | 50          | 51          | 50          |
| Divisió                        | 1,880       | 1,850       | 1,960       | 1,882       | 1,900       |
| Diferència amb $\Phi$          | 0,261595641 | 0,232433301 | 0,341966011 | 0,264318952 | 0,281966011 |
| Mitjana de les diferències     | 0,118629939 | 0,103662645 | 0,13291842  | 0,148723867 | 0,114216269 |



■ Mitjana de les diferències

En el gràfic el 0 és la bellesa àuria i com més alta és la barra menys s'acosta a aquesta.

### 3.4 Estudi del nombre d'or en les fulles de Pira i Montblanc

Com ja hem vist la proporció àuria s'estén per tot el món, i per tant, també per la nostra comarca, la tenen edificis, objectes i els propis éssers humans, però i les plantes? Això és el que es demostra en aquest estudi, algunes plantes de la Conca de Barberà tenen aquesta proporció tan especial en les seves fulles.

Les fulles que s'han fet servir per l'estudi s'han agafat a l'atzar de boscos i muntanyes dels llocs que mostra el següent mapa:



En total s'ha estudiat una mostra de 108 fulles, les quals es poden trobar en els annexos i tenen una etiqueta amb un nombre, en totes s'han fet totes les mesures necessàries per determinar si eren proporcionalment àuries, a més a més, també s'han estudiat altres aspectes com el color, la complexitat, el tipus de marge, etc. per a veure si són factors que influeixen en la proporció de la fulla.

Les 45 primeres fulles, tenen el nombre en negre a l'etiqueta i són les que contenen el nombre d'or, totes tenen les mesures marcades i l'operació que confirma la seva proporció. Les 63 restants, que tenen els nombres de l'etiqueta vermella, no contenen la proporció àuria.

## Taula d'informació de les fulles estudiades

| Numero | Nombre d'or | Tipus    | Persistència | Color     | Marge   | Agafat a  | Base      |
|--------|-------------|----------|--------------|-----------|---------|-----------|-----------|
| 1      | Sí          | Composta | Caduca       | Verd      | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 2      | Sí          | Composta | Caduca       | Verd      | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 3      | Sí          | Simple   | Perenne      | Altres    | Serrat  | Montblanc | Aguda     |
| 4      | Sí          | Composta | Perenne      | Altres    | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 5      | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Aguda     |
| 6      | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 7      | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd      | Pla     | Montblanc | Cordada   |
| 8      | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Montblanc | Obtusa    |
| 9      | Sí          | Simple   | Perenne      | Altres    | Lobulat | Montblanc | Irregular |
| 10     | Sí          | Simple   | Caduca       | Altres    | Serrat  | Pira      | Obtusa    |
| 11     | Sí          | Simple   | Caduca       | Altres    | Pla     | Montblanc | Cordada   |
| 12     | Sí          | Composta | Perenne      | Verd      | Pla     | Montblanc | Irregular |
| 13     | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Montblanc | Obtusa    |
| 14     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Pira      | Obtusa    |
| 15     | Sí          | Composta | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 16     | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd      | Pla     | Montblanc | Aguda     |
| 17     | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Montblanc | Aguda     |
| 18     | Sí          | Composta | Caduca       | Altres    | Serrat  | Pira      | Irregular |
| 19     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd      | Pla     | Pira      | Obtusa    |
| 20     | Sí          | Composta | Caduca       | Verd fort | Pla     | Pira      | Irregular |
| 21     | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Pira      | Cordada   |
| 22     | Sí          | Simple   | Perenne      | Altres    | Pla     | Pira      | Cordada   |
| 23     | Sí          | Composta | Caduca       | Altres    | Serrat  | Pira      | Obtusa    |
| 24     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Pira      | Obtusa    |
| 25     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Pira      | Cordada   |
| 26     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Pira      | Cordada   |
| 27     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd      | Lobulat | Pira      | Cordada   |
| 28     | Sí          | Composta | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Pira      | Aguda     |
| 29     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Lobulat | Montblanc | Cordada   |
| 30     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd      | Lobulat | Montblanc | Cordada   |
| 31     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Lobulat | Montblanc | Obtusa    |
| 32     | Sí          | Composta | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Pira      | Aguda     |
| 33     | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd      | Pla     | Pira      | Obtusa    |
| 34     | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd      | Lobulat | Pira      | Cordada   |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| Numero | Nombre d'or | Tipus    | Persistència | Color     | Marge   | Agafat a  | Base    |
|--------|-------------|----------|--------------|-----------|---------|-----------|---------|
| 35     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Pira      | Obtusa  |
| 36     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Pira      | Cordada |
| 37     | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Lobulat | Montblanc | Cordada |
| 38     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa  |
| 39     | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Lobulat | Pira      | Cordada |
| 40     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Montblanc | Cordada |
| 41     | Sí          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Pira      | Obtusa  |
| 42     | Sí          | Composta | Caduca       | Verd fort | Lobulat | Pira      | Aguda   |
| 43     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Pira      | Obtusa  |
| 44     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd      | Serrat  | Pira      | Obtusa  |
| 45     | Sí          | Simple   | Caduca       | Verd      | Serrat  | Pira      | Cordada |
| 46     | No          | Simple   | Perenne      | Verd      | Pla     | Montblanc | Aguda   |
| 47     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Montblanc | Aguda   |
| 48     | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Pla     | Montblanc | Obtusa  |
| 49     | No          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa  |
| 50     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa  |
| 51     | No          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Montblanc | Obtusa  |
| 52     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Montblanc | Aguda   |
| 53     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Lobulat | Montblanc | Cordada |
| 54     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Montblanc | Obtusa  |
| 55     | No          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa  |
| 56     | No          | Simple   | Perenne      | Altres    | Pla     | Montblanc | Obtusa  |
| 57     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Pira      | Aguda   |
| 58     | No          | Composta | Perenne      | Altres    | Pla     | Montblanc | Aguda   |
| 59     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Aguda   |
| 60     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Pira      | Obtusa  |
| 61     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa  |
| 62     | No          | Simple   | Perenne      | Verd      | Pla     | Montblanc | Aguda   |
| 63     | No          | Simple   | Perenne      | Verd      | Pla     | Pira      | Cordada |
| 64     | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Serrat  | Montblanc | Cordada |
| 65     | No          | Simple   | Perenne      | Verd      | Pla     | Montblanc | Obtusa  |
| 66     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Pira      | Aguda   |
| 67     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Aguda   |
| 68     | No          | Simple   | Perenne      | Verd      | Serrat  | Montblanc | Obtusa  |
| 69     | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Pla     | Montblanc | Obtusa  |
| 70     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Aguda   |
| 71     | No          | Composta | Perenne      | Verd      | Serrat  | Pira      | Obtusa  |
| 72     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Aguda   |
| 73     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa  |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| Numero | Nombre d'or | Tipus    | Persistència | Color     | Marge   | Agafat a  | Base      |
|--------|-------------|----------|--------------|-----------|---------|-----------|-----------|
| 74     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 75     | No          | Composta | Perenne      | Verd      | Pla     | Pira      | Obtusa    |
| 76     | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Pla     | Pira      | Aguda     |
| 77     | No          | Simple   | Perenne      | Verd      | Pla     | Pira      | Aguda     |
| 78     | No          | Composta | Perenne      | Verd      | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 79     | No          | Composta | Caduca       | Verd      | Serrat  | Pira      | Aguda     |
| 80     | No          | Composta | Caduca       | Verd      | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 81     | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Serrat  | Pira      | Aguda     |
| 82     | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Lobulat | Pira      | Aguda     |
| 83     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Pira      | Obtusa    |
| 84     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 85     | No          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Pira      | Obtusa    |
| 86     | No          | Simple   | Perenne      | Verd      | Pla     | Pira      | Cordada   |
| 87     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 88     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Pira      | Obtusa    |
| 89     | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Serrat  | Montblanc | Obtusa    |
| 90     | No          | Composta | Perenne      | Verd      | Lobulat | Pira      | Irregular |
| 91     | No          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 92     | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Pla     | Montblanc | Aguda     |
| 93     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Pira      | Obtusa    |
| 94     | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Serrat  | Montblanc | Obtusa    |
| 95     | No          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Serrat  | Pira      | Obtusa    |
| 96     | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 97     | No          | Simple   | Perenne      | Verd      | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 98     | No          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 99     | No          | Composta | Perenne      | Verd fort | Serrat  | Pira      | Aguda     |
| 100    | No          | Composta | Perenne      | Verd      | Serrat  | Pira      | Aguda     |
| 101    | No          | Composta | Perenne      | Verd      | Serrat  | Pira      | Obtusa    |
| 102    | No          | Simple   | Perenne      | Altres    | Pla     | Pira      | Obtusa    |
| 103    | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Serrat  | Montblanc | Aguda     |
| 104    | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Serrat  | Montblanc | Obtusa    |
| 105    | No          | Composta | Perenne      | Verd fort | Pla     | Montblanc | Aguda     |
| 106    | No          | Simple   | Caduca       | Verd fort | Pla     | Montblanc | Obtusa    |
| 107    | No          | Simple   | Perenne      | Verd fort | Pla     | Pira      | Aguda     |
| 108    | No          | Simple   | Caduca       | Verd      | Serrat  | Pira      | Obtusa    |

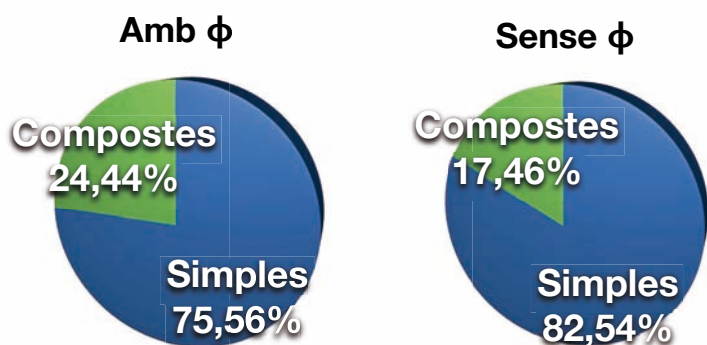
## Anàlisi de la informació de la taula

En aquest apartat de l'estudi s'analitzen els resultats per veure si els aspectes analitzats són vinculants perquè la fulla sigui proporcionalment àuria o no.

### 1.La continuïtat de la fulla

|              | Simples | Compostes |
|--------------|---------|-----------|
| Amb $\phi$   | 34      | 11        |
| Sense $\phi$ | 52      | 11        |

La continuïtat de la fulla ens diu si aquella fulla solament és un cos, una fulla simple, o es divideix en varis cossos, una fulla complexa.



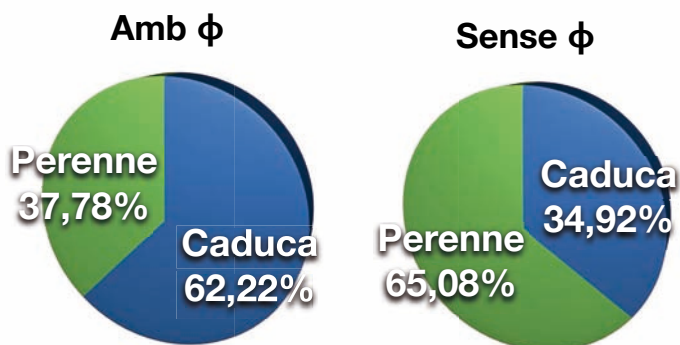
Com es pot apreciar en els percentatges, tan les fulles amb la proporció com les que no, tenen el mateix tant per cent de fulles compostes i simples.

### 2.La persistència de la fulla en la planta originària

Les plantes que canvien de fullatge cada any són les plantes caduques, mentre que les que mai canvien el fullatge són les perennes. Per a poder saber quines plantes eren perennes i quines caduques s'ha anat a mirar durant l'hivern si conservaven o no les fulles.

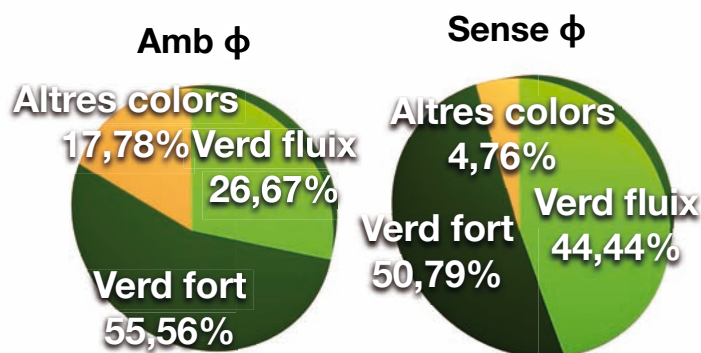
|              | Caduca | Perenne |
|--------------|--------|---------|
| Amb $\phi$   | 28     | 17      |
| Sense $\phi$ | 22     | 41      |

En aquest cas es pot veure una gran diferència entre les fulles àuries i les no àuries, ja que les no àuries destaquen per tindre'n més de perennes, moltes d'aquestes són fulles de plantes de jardí.



### 3.El color

|              | Verd fluix | Verd fort | Altres colors |
|--------------|------------|-----------|---------------|
| Amb $\phi$   | 12         | 25        | 8             |
| Sense $\phi$ | 28         | 32        | 3             |



El color de les fulles s'ha classificat segons el color que tenien quan encara estaven a la planta i s'han format tres grups: el verd fluix; el verd fort i un grup d'altres colors, ja que, hi havia molts colors com el gris, el granat i l'ocre que no tenien molta representació.

En aquest cas es pot veure que hi ha més percentatge de fulles no àuries de color verd fluix que de àuries, per tant

les fulles de color verd fluix tendiran a no ser àuries, mentre que les de color verd fort estaran repartides de manera quasi igual i les d'altres colors tendiran a ser àuries.

### 4.Tipus de marge de la fulla

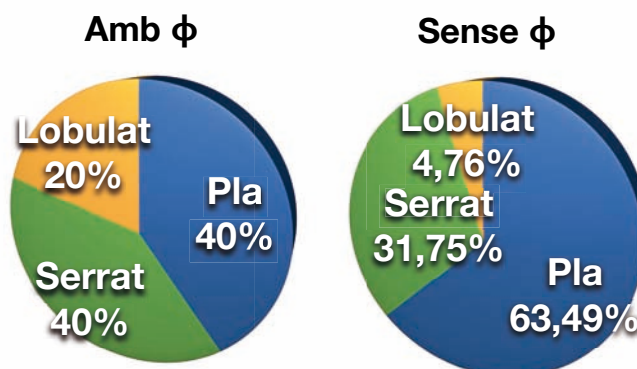
En aquest apartat s'ha analitzat el contorn de les fulles i s'han classificat en tres grups:

- Marge pla
- Marge serrat
- Marge lobulat



Com es pot veure en els gràfics de sectors les fulles amb marge lobulat tendeixen a ser àuries, les que tenen marge pla tendeixen a no ser-ho i les serrades es distribueixen quasi uniformement.

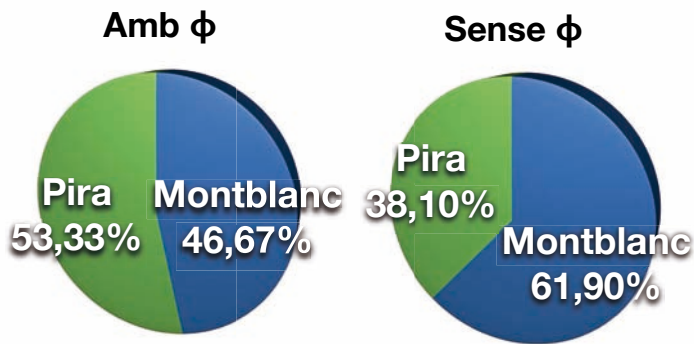
|              | Pla | Serrat | Lobulat |
|--------------|-----|--------|---------|
| Amb $\phi$   | 18  | 18     | 9       |
| Sense $\phi$ | 40  | 20     | 3       |



**5.Procedència**

|              | Montblanc | Pira |
|--------------|-----------|------|
| Amb $\phi$   | 21        | 24   |
| Sense $\phi$ | 39        | 24   |

En aquest anàlisi es pot veure d'on provenen les fulles àuries i les no àuries.

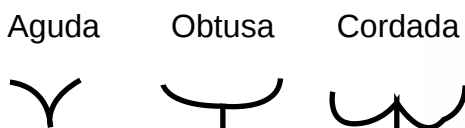


Era d'esperar que fos molt igualat, a la taula es pot veure que a Pira han quedat igual i a Montblanc s'han agafat més fulles no àuries.

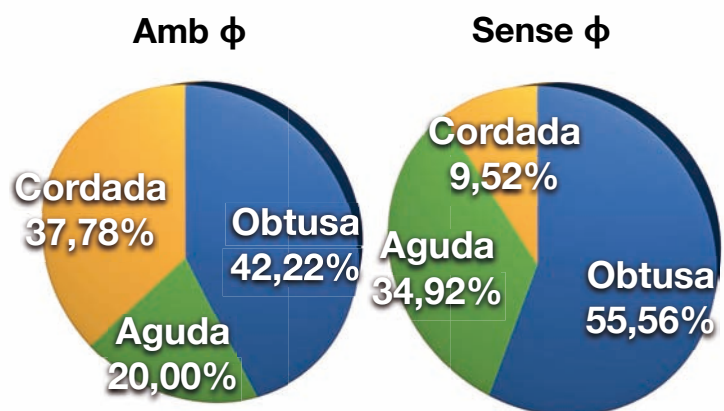
**6.Tipus de base de la fulla**

En aquesta secció de l'anàlisi es diferencia entre les diferents bases de la fulla segons la forma:

|              | Obtusa | Aguda | Cordada |
|--------------|--------|-------|---------|
| Amb $\phi$   | 19     | 9     | 17      |
| Sense $\phi$ | 35     | 22    | 6       |



Podem veure com tan les fulles àuries com les altres, tenen un tant per cent semblant en fulles obtuses i agudes, tot i que, les àuries en tenen menys en els dos casos. També es pot observar que hi ha moltes més fulles cordades en el bloc de les fulles àuries.

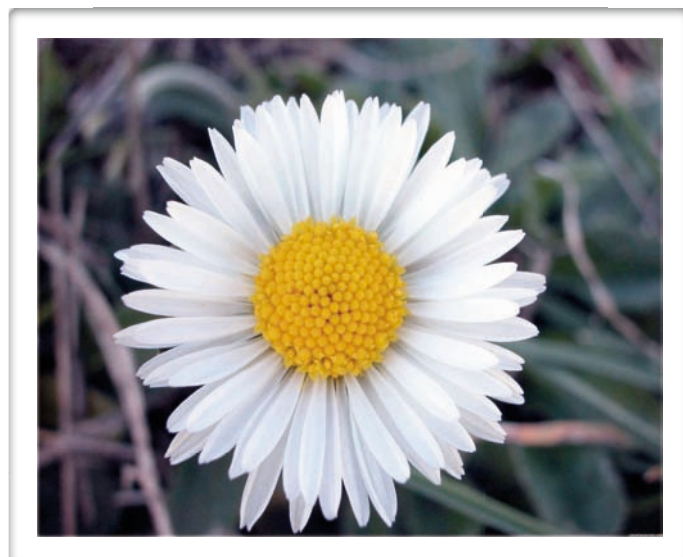


### 3.5 Conclusions del nombre d'or

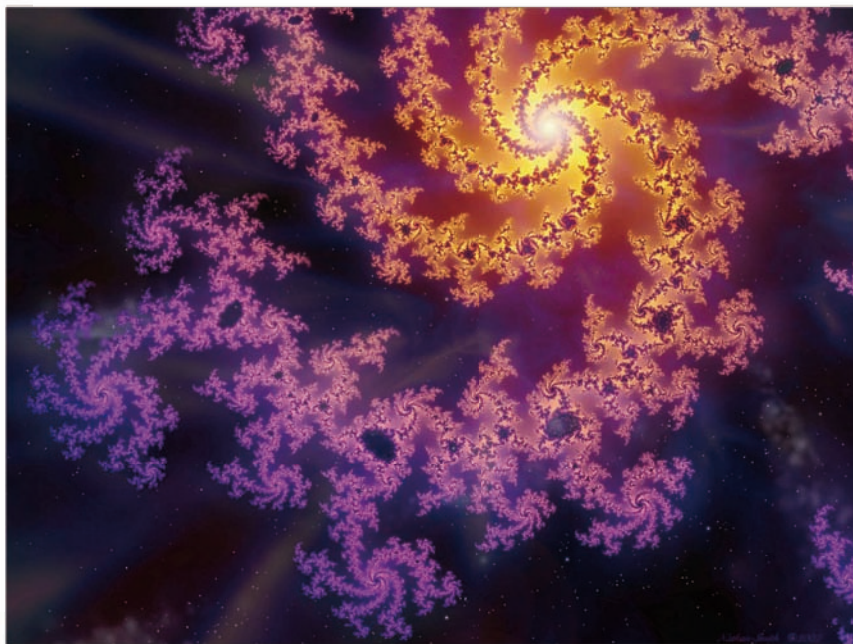
El nombre d'or, el podem trobar en molts llocs, creats per l'home o en la natura, un d'aquests llocs és el nostre cos on el nombre es manifesta en nombroses parts, com a la cara, al braç, a la cama...

També he pogut comprovar que a la Conca de Barberà hi ha moltes més fulles amb el nombre d'or de les que inicialment pensava que hi hauria, fet que m'ha sorprès, i a més a més, també he pogut veure factors o qualitats que poden afectar en agafar una fulla a l'atzar, sempre en l'àmbit de la Conca de Barberà. Ens serà més difícil trobar un fulla amb proporcions àuries a l'hivern que a l'estiu, ja que a l'hivern només hi ha fulles perennes, les quals només representen vora un 38% de les fulles àuries, també ens serà més difícil trobar fulles àuries de color verd clar o amb base aguda, ja que són poc comunes en aquestes fulles tan especials.

Una altra cosa que vaig descobrir durant la mesura i marcatge de les fulles va ser que algunes d'elles com les fulles numero 7,21,25,27,39,40,42 i 45 no tenen un sol rectangle auri sinó que en tenen més d'un i fins i tot més de dos, fet que ens evidencia que com en tot el món, la botànica també és un camp on el nombre d'or no passa de llarg.

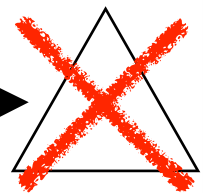
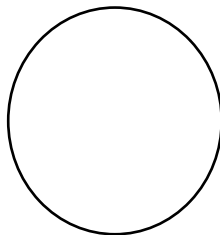


## 4. Les Fractals



## 4.1 Introducció a les fractals

Quan passegem pel carrer i veiem les coses que ens rodegen és fàcil determinar-ne la forma, les cases són quadrades o rectangulars, les rodes dels cotxes circulars, les teulades triangulars, etc. Aquestes són les formes de la geometria Euclidiana, és a dir de la geometria de les rectes i les corbes, que va ser introduïda per Euclides a l'època clàssica. Ara bé quan deixem de mirar a les coses creades artificialment per l'ésser humà i mirem cap a la natura no ens és tan fàcil deduir-ne la seva forma, les muntanyes no són triangulars, els rius no són rectes, les copes dels arbres no són esfèriques, tot això ens porta cap a plantejar-nos unes quantes preguntes: Quina forma tenen aquests objectes; Es poden estudiar?; Són caòtics o segueixen unes regles? Doncs bé les respostes d'aquestes preguntes es poden resumir en només un concepte matemàtic anomenat fractal. Però, què és un fractal?, doncs un fractal és una figura geomètrica, l'estructura bàsica de la qual es va repetint a diferents escales, així doncs quan veiem una muntanya no podem afirmar que és un triangle però si que podem afirmar que la seva estructura pot estar formada per milions de triangles ordenats de manera fractal, i quan veiem un arbre no podem dir que les seves rames siguin rectes sinó que es van dividint en successives rectes formant una forma fractal.



## 4.2 Explicació de les fractals

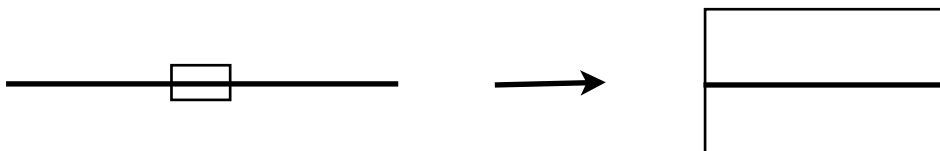
Un cos fractal és tot aquell cos que no és totalment llis i unit, tots els cossos rugosos o fragmentats tenen aquesta qualitat tan particular. Així direm que un objecte fractal és aquell que per la seva naturalesa rugosa o fragmentada es pot considerar complexe per a ser estudiat, és a dir, al ser una línia rugosa no en podem trobar mai la seva longitud de forma 100% precisa mesurant-la solament amb eines comunes de la geometria euclidiana com el regle, l'escaire o el compàs. El mateix passarà amb plans rugosos, serà impossible mesurar-ne la seva àrea, i també en els objectes "tridimensionals" rugosos trobarem la incapacitat de mesurar-ne el volum.

Un altre terme que va lligat sempre amb l'adjectiu fractal és el concepte d'auto-similitud, és a dir, amb els estudis fets per Benoît Mandelbrot aproximadament als anys 70, es va arribar a la conclusió que tots aquests objectes rugosos o fractals tenien en més o menys mesura, depenent-ne del grau de rugositat, la qualitat de repetir-se en diferents escales. Un cos fractal es va repetint en el seu cos de manera infinita, la part d'aquest cos s'assembla al cos original però més reduït.

Altres característiques més avançades de les fractals són que la seva dimensió Hausendorff-Besicovitch es major que la seva dimensió topològica, i que un fractal es defineix per un algorisme recursiu.

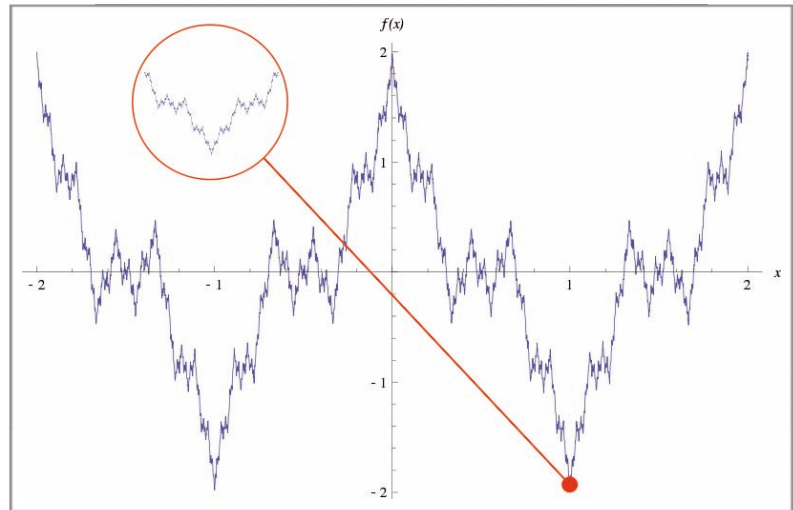
### Història de les fractals

La primera persona en guiar la ciència cap a les fractals va ser Leibniz, al segle XVII, i va dir que hi havia cossos que eren auto-similars en ells mateixos, tot i això, va fallar, ja que, va posar com exemple la recta, cos que actualment no es considera fractal.



Podem considerar-ho auto-similar però no fractal.

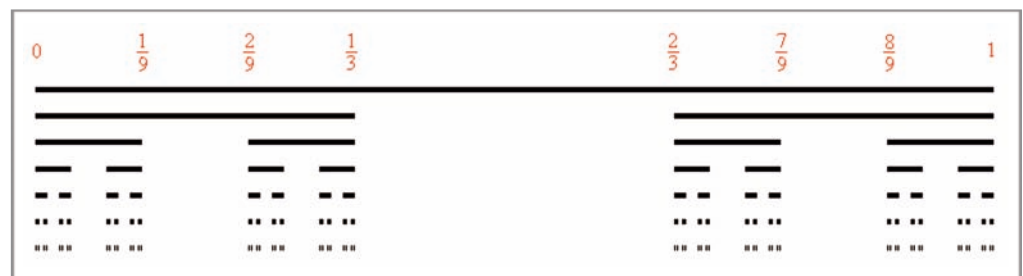
No serà fins molts anys després, al 1872, quan Karl Weierstrass descriurà una funció, la representació gràfica de la qual es comporta de forma fractal.



La funció de Weierstrass:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$  on  $0 < a < 1$  i  $b$  es un nombre enter imparell i positiu i es compleix que  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ .

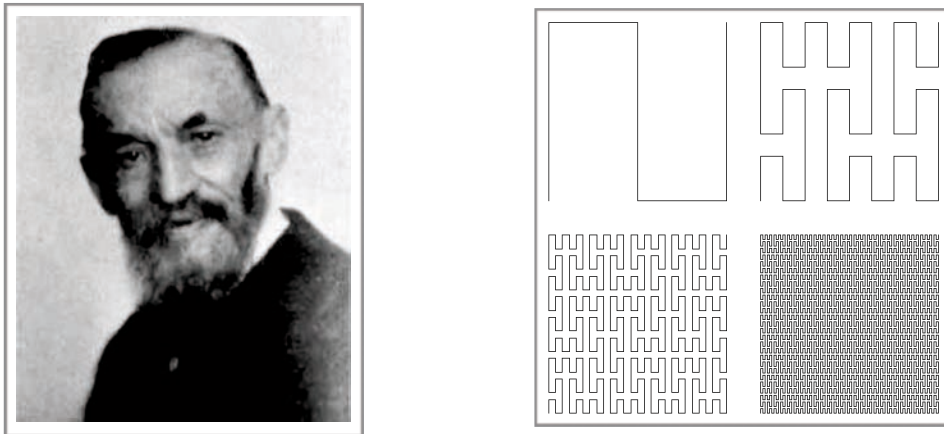
Aquesta funció com es pot observar té caràcter fractal en l'interval  $[-2, 2]$ .

El 1882 Georg Cantor va introduir el seu conjunt de Cantor, probablement l'exemple més simple d'auto-similitud.



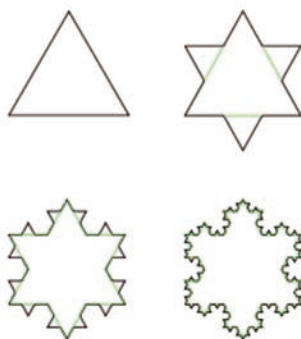
Aquest conjunt no es pot mostrar en la seva totalitat perquè és infinit. Els segments es van dividint infinitament, mai es possible, per molt que ampliem la imatge, arribar al final del conjunt i quan ampliem una part tornarem a la mateixa imatge de l'inici.

El 1890 Giuseppe Peano publica la corba de Peano, una corba que es desenvolupa de forma fractal i que acaba cobrint tota una superfície partint de segments.

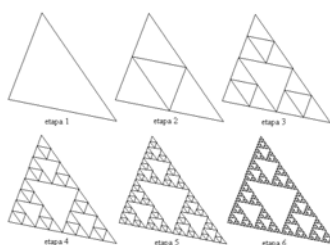


Aquesta corba en el seu límit acabarà cobrint tota la superfície. Actualment es pot considerar fractal perquè parteix d'un cos de dimensió 1 i en el seu límit és una dimensió superior.

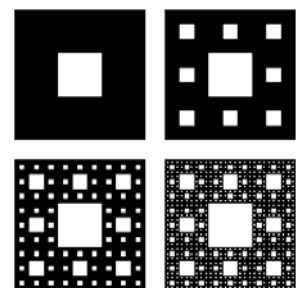
Anys més tard, van aparèixer uns pocs matemàtics interessats pel tema. Així van aconseguir els seus propis conjunts fractals, basant-se en formes simples a les que s'hi aplicaven d'altres construccions geomètriques. El 1904 es presenta la corba de Koch, al 1915 el triangle de Waclaw Sierpinski i un any més tard també es va presentar la catifa de Sierpinski, també al 1926 un fractal "tridimensional" anomenat l'esponja de Menguer.



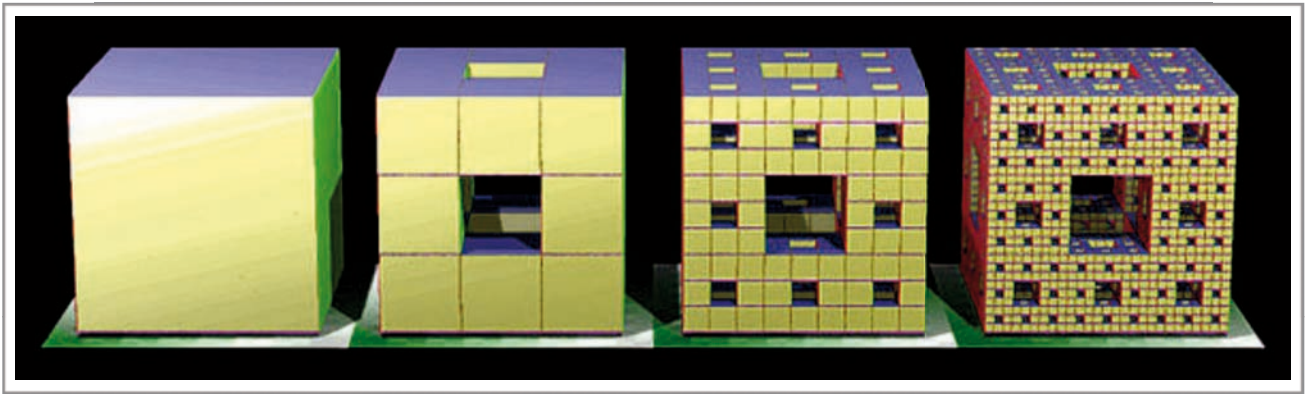
Helge von Koch va descobrir aquesta corba fractal partint cada costat del triangle en tres i encastant un nou triangle en la part central. Com es pot apreciar aquest fractal s'assembla molt a un floc de neu.



El triangle de Sierpinski es pot crear posant un triangle invertit dins un altre triangle de forma reiterada, però sempre deixant buit el triangle que hem posat.



Sierpinski també va fer servir la mateixa tècnica per desenvolupar aquest fractal, en aquest cas la figura no és un triangle sinó un quadrat.

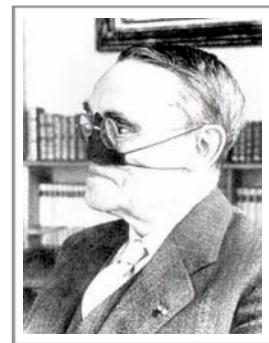
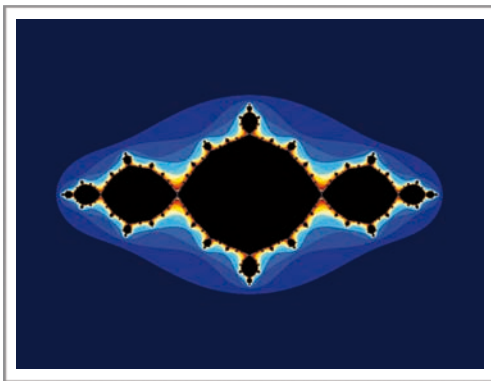


L'esponja de Menger és l'aplicació "tridimensional" de la catifa de Sierpinski, seguint exactament els mateixos mètodes però en "tres dimensions".

Si més no, aquestes figures només es consideraven com a curiositats i no van aconseguir cridar l'atenció de la comunitat matemàtica, fins i tot, en alguns casos van ser considerats monstres per alguns matemàtics i durant molts anys no es va trobar necessari el seu estudi.

Però l'any 1919, va sorgir un element molt important per a l'estudi d'aquests conjunts fractals, l'anomenada dimensió de Hausdorff-Besicovitch.

Serà per allà els anys 1920 quan Gaston Julia juntament amb Pierre Fatou investiguen les funcions iteratives en el pla complex i descobreixen que estan estretament vinculades amb el món de les fractals.



En la imatge un dels molts conjunts de Julia, els quals es van anomenar després que Julia morís, ja que, es va necessitar l'ajuda dels ordinadors per a dibuixar-los, però com que es van poder descobrir gràcies als seus estudis de la dinàmica complexa, es van anomenar així en honor seu, més endavant explicarem com es poden crear.

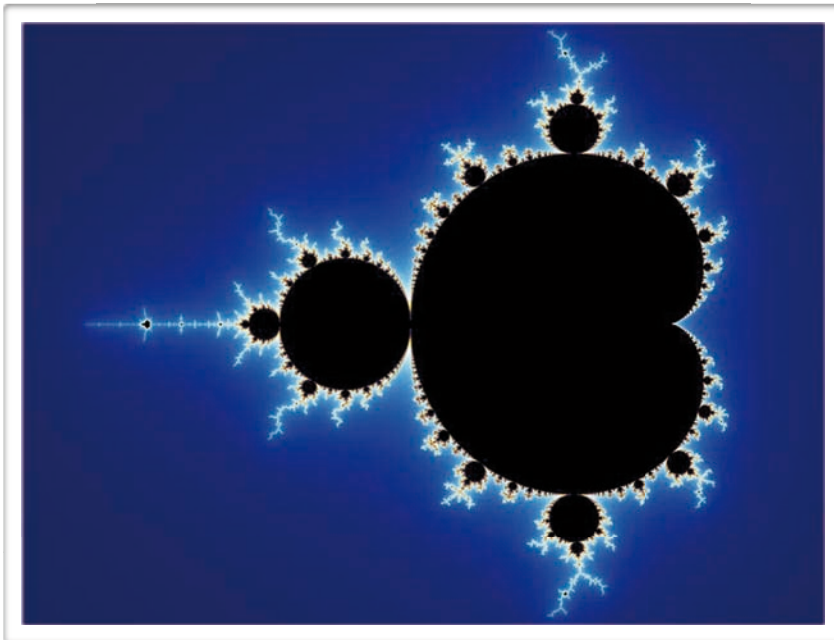
Durant molts anys s'oblidaran tots els descobriments, fins que finalment amb l'invenció dels ordinadors apareixerà Benoît Mandelbrot, que primerament va publicar un article l'any 1967 anomenat "*Quan mesura la costa de Gran Bretanya?*". En aquest article Mandelbrot explica que és impossible trobar la mesura exacta, ja que l'eina per mesurar la longitud hauria de ser infinitament petita perquè la costa lluny de ser recta és plena d'irregularitats.



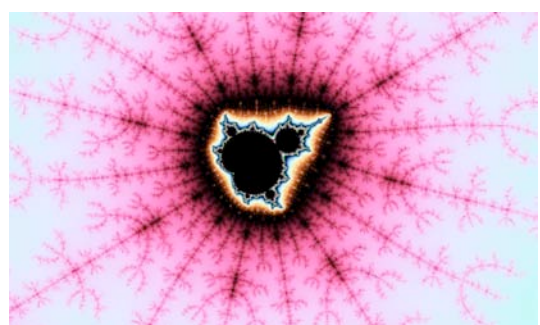
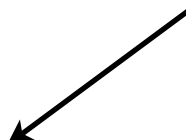
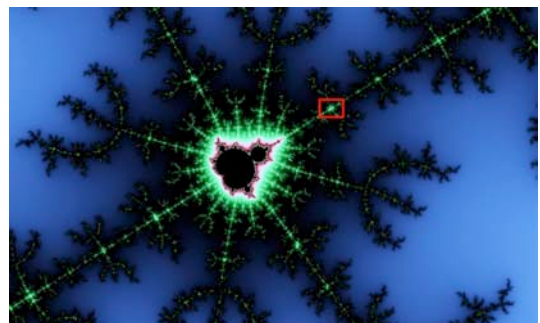
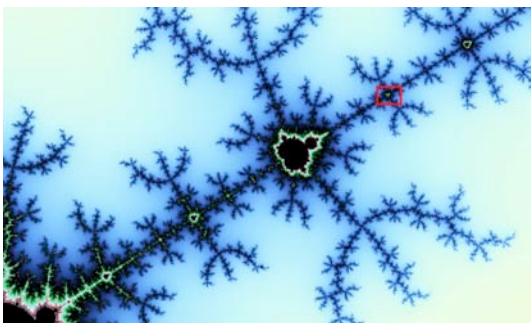
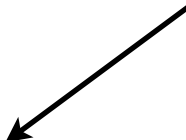
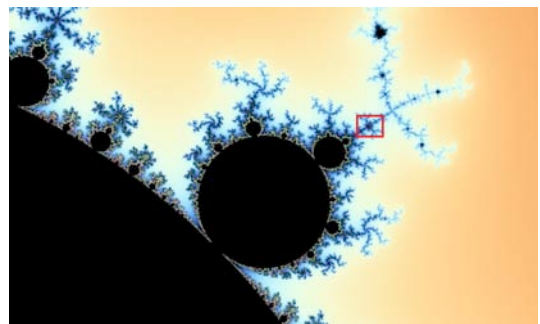
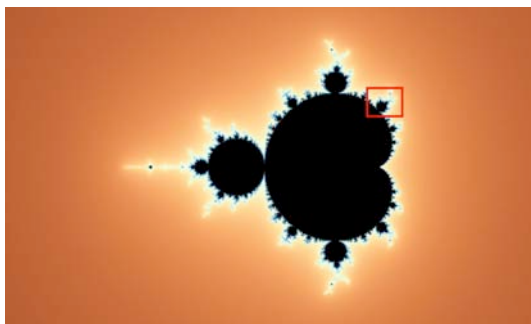
A mesura que utilitzem una mesura de longitud més precisa arribarem a cometre menys error, però mai serà possible trobar la mesura sense error. Per exemple, si agafem una mesura d'un quilòmetre, la longitud de la costa sortirà més imprecisa que si agafem una mesura d'un centímetre, però en els dos casos cometrem error.

El 1975, Mandelbrot va introduir la paraula "fractal" per a referir-se a les corbes i conjunts ideats per Julia, Kotch... El 1977 va publicar el llibre "*Els objectes fractals: forma atzar i dimensió*" on descriu aquests objectes com una eina per a interpretar molts aspectes del món real (diferint amb els anteriors matemàtics que tractaven les fractals com una curiositat) i on parla de les seves propietats com l'auto-semblança, la invariància d'escala... El 1982 va publicar un altre llibre de títol "*La geometria fractal de la natura*" on demostra que les fractals són aplicables a les muntanyes, les costes, els rius...

El 1980 Mandelbrot va veure una imatge d'un fractal dibuixat per Robert Brooks i Peter Matelski, es va posar a estudiar-la i el mateix any va publica un article sobre el fractal, el 1982 va ser estudiat per Adrien Douady i John H. Hubbard, els qual van establir-ne moltes de les propietats que se'n coneixen. Finalment en honor a Mandelbrot es va anomenar el fractal amb el seu nom.



El conjunt de Mandelbrot és el fractal més important i especial que es coneix, té unes propietats que el diferencien de tots els altres i l'estudi del seu contorn és d'una complexitat infinita. A continuació, estan impreses unes imatges del conjunt de Mandelbrot que he obtingut mitjançant un programa d'exploració d'aquest conjunt anomenat Fractive.



Com es pot veure en les successives ampliacions del conjunt de Mandelbrot, aquest es va repetint infinites vegades, fet que fa impossible que es pugui conèixer del tot i per tant, per estudiar-lo faria falta una eternitat infinita de temps.

### **Com es pot aconseguir el conjunt de Mandelbrot i de Julia?**

El conjunt de Mandelbrot prové del conjunt de Julia, per tant, primer explicaré d'on prove el conjunt de Julia. El conjunt de Julia es un fractal de tipus IFS, acrònim de l'anglès "*Iterated Function System*", un sistema que permet fer milions de fractals. Aquest sistema es basa en la iteració d'una funció, els conjunts de Julia segueixen la funció  $f(z) = z^2 + C$  on  $C$  és un nombre complex constant que canviarà en cada conjunt de Julia i  $z$  és la coordenada del pla complex que volem estudiar. Per poder dibuixar un conjunt de Julia només hem de posar un nombre complex constant en el lloc  $C$  i donar un valor a  $z$ , quan trobem la solució a la funció posem la solució en el lloc de la  $z$  i tornem a calcular, a continuació tornem a aplicar la funció al resultat i seguim així fins a arribar a una de les dues solucions possibles: la iteració tendeix a 0 o la iteració tendeix a infinit. Si la iteració tendeix a 0 pintarem el punt  $z$  del pla complex de color negre, si la iteració tendeix a infinit pintarem el punt  $z$  d'un altre color depenent de la rapidesa amb la que tendeix a infinit. Exemple: volem dibuixar el conjunt de Julia  $C=0,1+0,6i$ , per a fer-ho comencem aplicant la funció a un punt, per exemple el punt  $z=0+0i=0$

$$f(0) = 0^2 + 0,1 + 0,6i$$

$$f(0,1 + 0,6i) = (0,1 + 0,6i)^2 + 0,1 + 0,6i = -0,25 + 0,72i$$

$$f(-0,25 + 0,72i) = (-0,25 + 0,72i)^2 + 0,1 + 0,6i = -0,35 + 0,24i$$

$$f(-0,35 + 0,24i) = (-0,35 + 0,24i)^2 + 0,1 + 0,6i = 0,16 + 0,43i$$

...

Si iterem infinitament la funció, aquesta tendeix a 0, per tant pintarem el punt  $z$  de color negre. Ara suposem la coordenada  $z=3+2i$

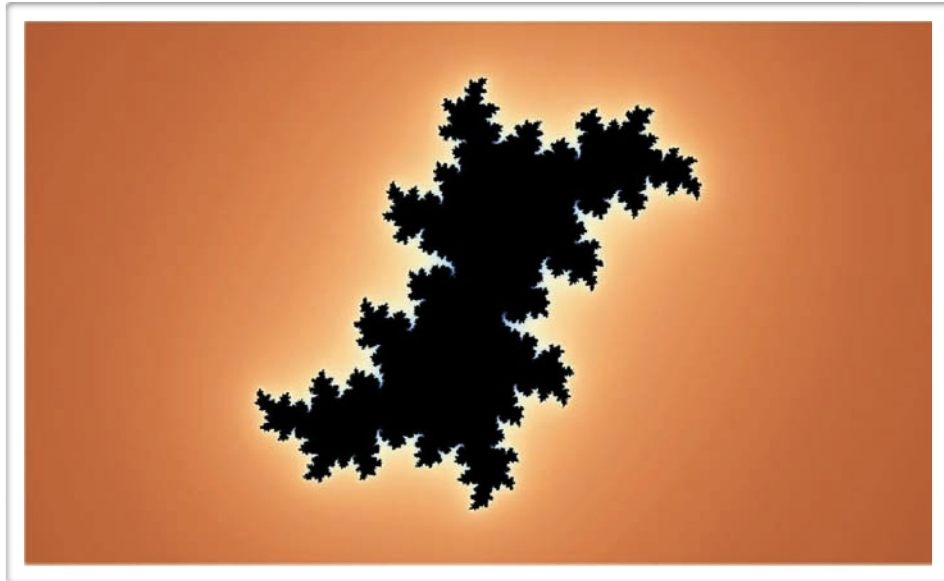
$$f(3 + 2i) = (3 + 2i)^2 + 0,1 + 0,6i = 51 + 12,6i$$

$$f(51 + 12,6i) = (51 + 12,6i)^2 + 0,1 + 0,6i = -132,65 + 129,12i$$

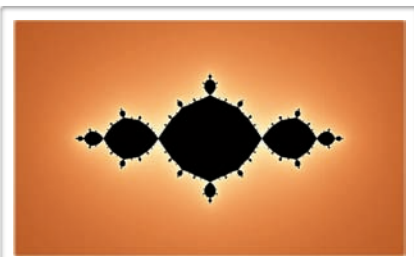
$$f(-132,65 + 129,12i) = (-132,65 + 129,12i)^2 + 0,1 + 0,6i = 924,15 - 3425,5i$$

...

La iteració tendeix a infinit. per tant no pintarem el punt  $z=3+2i$  de color negre. Si seguim la mateixa regla amb tots els punts del pla, cosa que solament poden fer els ordinadors (degut a la infinitat de temps que ens portaria calcular-ho), obtindrem el següent dibuix corresponent al conjunt de Julia  $C=0,1+0,6i$ .



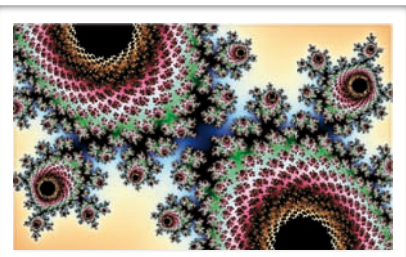
Hi ha milions de conjunts de Julia, els quals podem agrupar en dos grans grups, els conjunts de Julia connectats i els conjunts de Julia desconnectats. Els conjunts de Julia connectats són els conjunts  $C$  els quals el seu punt  $z=0+0i$  tendeix a 0, són tots els que formen un gran cos de color negre com l'anterior exemple, el conjunt  $C=0,1+0,6i$ . En canvi els conjunts desconnectats són els que el seu punt  $z=0+0i$  tendeix a infinit, i són els conjunts sense taques negres on tots els nombres tendeixen a infinit i els conjunts dividits en dos o més núvols de punts negres. A continuació es mostra més clarament en un esquema:



Aquest es el conjunt de Julia per a  $C=-1+0i$ , és un conjunt connectat, ja que el punt 0 esta pintat de negre i és un cos negre uniforme. Ni que sembli que estigui partit, està unit.



El conjunt de l'esquerra és el conjunt de Julia quan  $C=-0,44-0,74i$  i el de la dreta és el  $C=-0,3141-0,621i$ . Els dos són conjunts desconnectats perquè la coordenada 0 tendeix a infinit, i perquè en el de l'esquerra no hi ha cap numero que tendeixi a 0 i en el de la dreta si que n'hi ha però els dos núvols de punts estan separats.



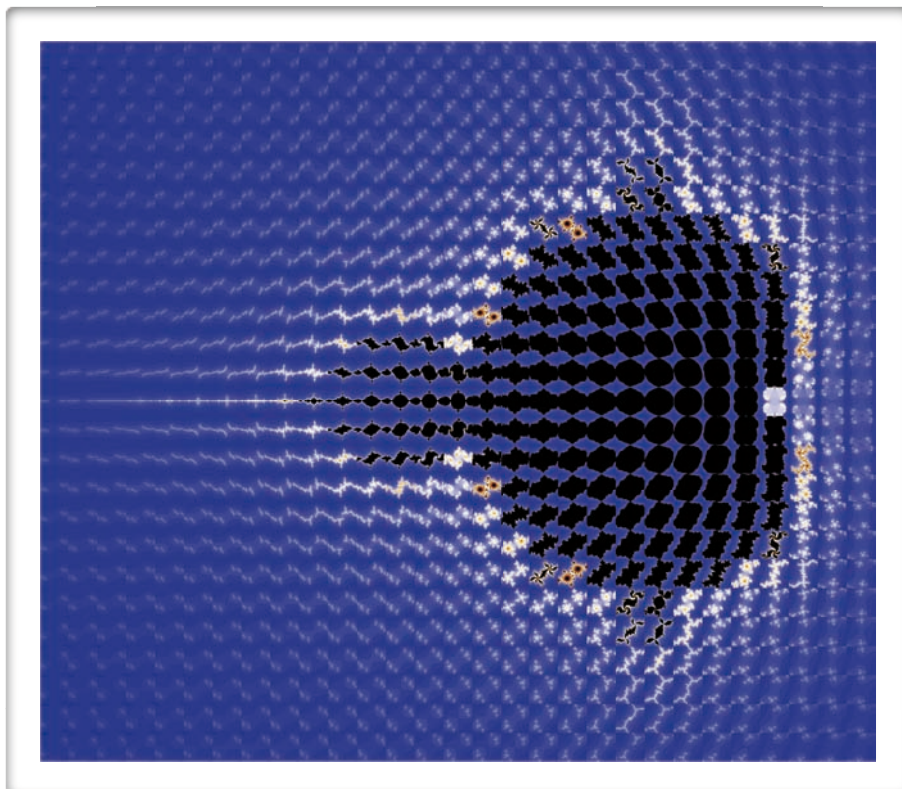
Ara que ja hem entès el conjunt de Julia toca entendre el conjunt de Mandelbrot, que no és més que l'agrupació de tots els conjunts de Julia.

El conjunt de Mandelbrot funciona igual que el de Julia, és un dibuix en un pla complex, la llei que segueix té a veure amb els conjunts de Julia connectats i desconnectats. Pintarem el punt  $P$  del conjunt de Mandelbrot:

- Negre si el conjunt de Julia  $C=P$  és un conjunt connectat
- D'un altre color si el conjunt de Julia  $C=P$  és un conjunt desconnectat sense cap  $z$  que tendeixi a 0
- Com a frontera entre el negre i un altre color si el conjunt de Julia  $C=P$  és desconnectat però té punts  $z$  que tendeixen a 0, és a dir és un conjunt amb més d'un núvol de punts negres.

Per tant, tornant a l'exemple del final de la pàgina anterior, com que el conjunt de Julia  $C=-1+0i$  és connectat, la coordenada en el conjunt de Mandelbrot  $P=-1+0i$  estarà pintada de negre. En canvi la coordenada  $P=-0,44-0,74i$  no estarà pintada de negre. I la coordenada  $P=-0,3141-0,621i$  serà la frontera entre el negre i l'altre color.

En el següent dibuix es pot veure com el Conjunt de Mandelbrot és pot construir també ajuntant tots els conjunts de Julia en les coordenades  $C$  del conjunt.



## La Dimensió Fractal

Les fractals, com ja hem dit, són molt complexos, i no poden seguir el concepte de la dimensió euclidiana (Dimensió1: recta, Dimensió2: pla, Dimensió3: cossos amb volum), sinó que tenen una dimensió pròpia, la anomenada dimensió fractal. El concepte de dimensió fractal fa referència a un nombre  $D \in \mathbb{R}$  que generalitza el concepte de dimensió ordinària per a els objectes que no admeten espai tangent, com és el cas de les fractals.

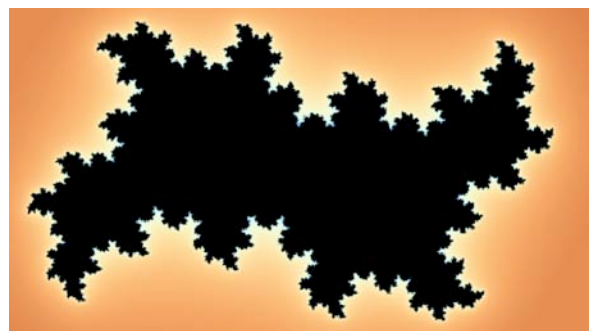
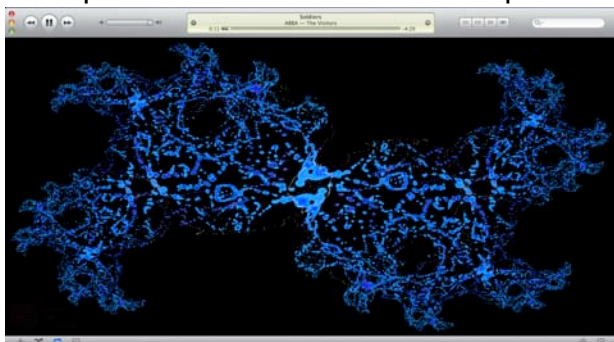
Així un fractal “pla” com el conjunt de Mandelbrot o el de Julia tindran una dimensió fractal compresa entre 1 i 2 i un fractal “tridimensional” com podria ser l'esponja de Menger tindrà una dimensió fractal compresa entre 2 i 3.

En els punts 4.3 i 4.4 del treball he calculat la dimensió fractal d'alguns espais de la Conca de Barberà, com que el càlcul d'aquesta dimensió no és fàcil i disposava d'un programa informàtic anomenat Fractalyse l'he fet servir per calcular les dimensions fractals.

## Aplicacions de les fractals

Les fractals, lluny de ser inútils, tenen molta utilitat en alguns camps del coneixement que els fan pràctics per la nostra vida.

Un exemple és la medicina, les fractals s'han fet servir per estudiar parts del cos que també és desenvolupen auto-similarment, per exemple, en els pulmons o els vasos sanguinis. Un altre exemple és l'astrofísica, ja que, es coneix que les galàxies i les anelles de Saturn es comporten de manera fractal. Les fractals també es fan servir per prediccions, com la predicció meteorològica. També serveixen per analitzar alguns aspectes de l'economia. I finalment, una altra aplicació és l'art i el disseny gràfic, ja que, les fractals al ser imatges tan curioses i boniques es poden fer servir per decorar. En la imatge de sota es pot veure el reproductor de música iTunes creant un fractal en el visualitzador, es el conjunt de Julia  $C=0,18-0,53i$  com es mostra al costat, això és un exemple d'un fractal utilitzat com a part decorativa del reproductor.



### 4.3 Les fractals en la natura

Les fractals no són solament dibuixos creats amb ordinador reiterant funcions, sinó que, com el nombre d'or, es troben en la natura.

Un fractal molt conegut és la falguera, aquesta és possiblement la planta on es veu més bé l'auto-semblança a diferents escales. En les següents fotos es mostren tres tipus de falgueres. En la primera es veu molt clarament el fractal, en les altres no es tan clar. També es pot veure a les fitxes 1, 2 i 3 annexes al treball.



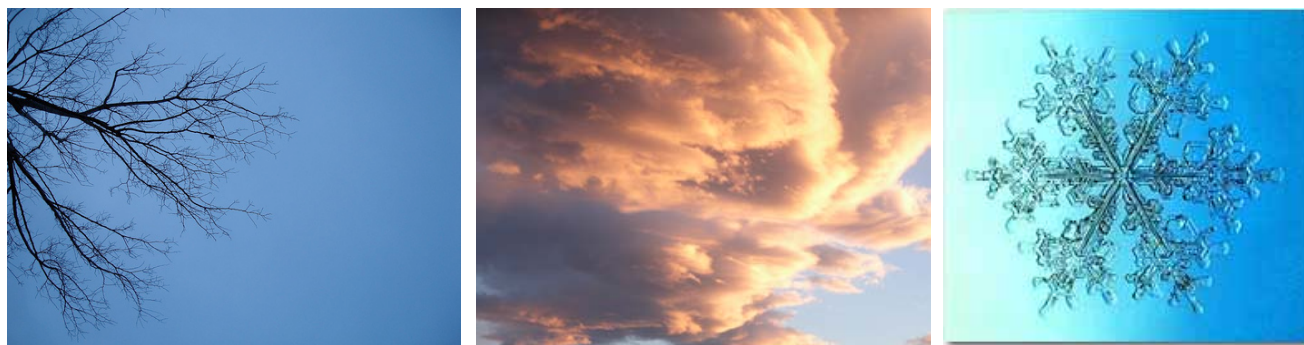
Altres plantes també segueixen formes fractals, com és el cas de l'herba de la fitxa 4, els brots de fonoll jove de la fitxa 5, les flors de fonoll de la fitxa 6 i les flors de *Daucus Carota* o pastanaga silvestre de la fitxa 7. A continuació les fotos d'aquestes plantes:



Altres fractals són els que formen els xiprers, un bròcoli anomenat “romanesc” o els vasos conductors de la saba en les fulles, les quals es ramifiquen de forma fractal com es pot veure a la fitxa 8 i a continuació:



Les fractals també es troben en els núvols, les branques dels arbres i els flocs de neu com es mostra a continuació:



Al veure que les fractals apareixien a la natura hem vaig preguntar: estaran presents a la Conca de Barberà? Així que vaig decidir estudiar dos aspectes que podien ser fractals en l'entorn de la Conca, primer vaig estudiar la dimensió fractal de les muntanyes de Prades i Poblet i després vaig estudiar la dimensió fractal del pobles de la Conca.

A continuació hi ha l'estudi de la dimensió fractal de les muntanyes de Prades i Poblet, per a fer l'estudi vaig fer servir uns mapes topogràfics i vaig traçar línies entre els pobles de les muntanyes, per més tard fer-ne el tall geològic i introduir-lo al programa Fractalyse per descobrir-ne la dimensió fractal. A l'estudi hi ha les taules amb la informació necessària per fer els talls geològics, i alguna informació adicional que pensava que seria necessària però no m'ha fet falta, com l'angle de pendent o la distància.

Els talls geològics són entre Rojals i Prades; l'Espluga de Francolí i Rojals; l'Espluga de Francolí i Prades i finalment entre Poblet i Vimbodí.

En l'estudi de la dimensió fractal del contorn dels pobles de la Conca vaig obtenir una imatge aèria amb el Google Earth dels pobles que figuraven a la llista de municipis de la Viquipèdia, i vaig repassar-ne el contorn, tot seguit vaig eliminar-ne la imatge del satèl·lit per quedar-me solament amb el contorn i poder-lo analitzar al programa Fractalyse.

## 4.4 Estudi de la dimensió fractal de les muntanyes de Prades i Poble

### Dimensió fractal entre Rojals i Prades

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA     | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|---------------|-------------------------------|
| 1    | 0          | 0               | 0                        | 980    | 0          | 0                        | 0             | 0                             |
| 2    | 1,2        | 180             | 180                      | 980    | 0          | 0                        | 180           | 5,44033203101                 |
| 3    | 0,7        | 105             | 285                      | 990    | 10         | 10                       | 105,475115549 | 0                             |
| 4    | 1,7        | 255             | 540                      | 990    | 0          | 10                       | 255           | -12,528807709                 |
| 5    | 0,3        | 45              | 585                      | 980    | -10        | 0                        | 46,0977222865 | -6,911227119                  |
| 6    | 0,55       | 82,5            | 668                      | 970    | -10        | -10                      | 83,103850693  | -7,5946433686                 |
| 7    | 0,5        | 75              | 743                      | 960    | -10        | -20                      | 75,6637297521 | -4,2363947991                 |
| 8    | 0,9        | 135             | 878                      | 950    | -10        | -30                      | 135,369863707 | 0                             |
| 9    | 0,7        | 105             | 983                      | 950    | 0          | -30                      | 105           | -4,2363947991                 |
| 10   | 0,9        | 135             | 1.118                    | 940    | -10        | -40                      | 135,369863707 | -7,5946433686                 |
| 11   | 0,5        | 75              | 1.193                    | 930    | -10        | -50                      | 75,6637297521 | -12,528807709                 |
| 12   | 0,3        | 45              | 1.238                    | 920    | -10        | -60                      | 46,0977222865 | -14,931417178                 |
| 13   | 0,25       | 37,5            | 1.275                    | 910    | -10        | -70                      | 38,8104367407 | -12,528807709                 |
| 14   | 0,3        | 45              | 1.320                    | 900    | -10        | -80                      | 46,0977222865 | 0                             |
| 15   | 0,5        | 75              | 1.395                    | 900    | 0          | -80                      | 75            | -23,962488975                 |
| 16   | 0,15       | 22,5            | 1.418                    | 890    | -10        | -90                      | 24,6221445045 | -53,130102354                 |
| 17   | 0,1        | 15              | 1.433                    | 880    | -20        | -110                     | 25            | 0                             |
| 18   | 0,1        | 15              | 1.448                    | 870    | 0          | -110                     | 15            | 0                             |
| 19   | 0,3        | 45              | 1.493                    | 870    | 0          | -110                     | 45            | 0                             |
| 20   | 1,1        | 165             | 1.658                    | 870    | 0          | -110                     | 165           | -9,462322208                  |
| 21   | 0,2        | 30              | 1.688                    | 865    | -5         | -115                     | 30,4138126515 | 9,46232220803                 |
| 22   | 0,2        | 30              | 1.718                    | 870    | 5          | -110                     | 30,4138126515 | 12,5288077092                 |
| 23   | 0,3        | 45              | 1.763                    | 880    | 10         | -100                     | 46,0977222865 | 0                             |
| 24   | 0,6        | 90              | 1.853                    | 880    | 0          | -100                     | 90            | -6,3401917459                 |
| 25   | 0,6        | 90              | 1.943                    | 870    | -10        | -110                     | 90,5538513814 | -23,962488975                 |
| 26   | 0,15       | 22,5            | 1.965                    | 860    | -10        | -120                     | 24,6221445045 | 18,4349488229                 |
| 27   | 0,2        | 30              | 1.995                    | 870    | 10         | -110                     | 31,6227766017 | 33,690067526                  |
| 28   | 0,1        | 15              | 2.010                    | 880    | 10         | -100                     | 18,0277563773 | 0                             |
| 29   | 0,5        | 75              | 2.085                    | 880    | 0          | -100                     | 75            | -33,690067526                 |
| 30   | 0,1        | 15              | 2.100                    | 870    | -10        | -110                     | 18,0277563773 | -53,130102354                 |
| 31   | 0,05       | 7,5             | 2.108                    | 860    | -10        | -120                     | 12,5          | -12,528807709                 |
| 32   | 0,3        | 45              | 2.153                    | 850    | -10        | -130                     | 46,0977222865 | 0                             |
| 33   | 0,4        | 60              | 2.213                    | 850    | 0          | -130                     | 60            | 33,690067526                  |
| 34   | 0,1        | 15              | 2.228                    | 860    | 10         | -120                     | 18,0277563773 | 33,690067526                  |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA     | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|---------------|-------------------------------|
| 35   | 0,1        | 15              | 2.243                    | 870    | 10         | -110                     | 18,0277563773 | 18,4349488229                 |
| 36   | 0,2        | 30              | 2.273                    | 880    | 10         | -100                     | 31,6227766017 | 10,7842978676                 |
| 37   | 0,35       | 52,5            | 2.325                    | 890    | 10         | -90                      | 53,4438958161 | 14,9314171781                 |
| 38   | 0,25       | 37,5            | 2.363                    | 900    | 10         | -80                      | 38,8104367407 | 14,9314171781                 |
| 39   | 0,25       | 37,5            | 2.400                    | 910    | 10         | -70                      | 38,8104367407 | 23,9624889746                 |
| 40   | 0,15       | 22,5            | 2.423                    | 920    | 10         | -60                      | 24,6221445045 | 23,9624889746                 |
| 41   | 0,15       | 22,5            | 2.445                    | 930    | 10         | -50                      | 24,6221445045 | 29,0546040991                 |
| 42   | 0,12       | 18              | 2.463                    | 940    | 10         | -40                      | 20,591260282  | 33,690067526                  |
| 43   | 0,1        | 15              | 2.478                    | 950    | 10         | -30                      | 18,0277563773 | 33,690067526                  |
| 44   | 0,1        | 15              | 2.493                    | 960    | 10         | -20                      | 18,0277563773 | 9,70039194395                 |
| 45   | 0,39       | 58,5            | 2.552                    | 970    | 10         | -10                      | 59,3485467387 | 18,4349488229                 |
| 46   | 0,2        | 30              | 2.582                    | 980    | 10         | 0                        | 31,6227766017 | 14,9314171781                 |
| 47   | 0,25       | 37,5            | 2.619                    | 990    | 10         | 10                       | 38,8104367407 | 14,9314171781                 |
| 48   | 0,25       | 37,5            | 2.657                    | 1000   | 10         | 20                       | 38,8104367407 | 23,9624889746                 |
| 49   | 0,15       | 22,5            | 2.679                    | 1010   | 10         | 30                       | 24,6221445045 | 23,9624889746                 |
| 50   | 0,15       | 22,5            | 2.702                    | 1020   | 10         | 40                       | 24,6221445045 | 53,1301023542                 |
| 51   | 0,05       | 7,5             | 2.709                    | 1030   | 10         | 50                       | 12,5          | 53,1301023542                 |
| 52   | 0,05       | 7,5             | 2.717                    | 1040   | 10         | 60                       | 12,5          | 0                             |
| 53   | 1          | 150             | 2.867                    | 1040   | 0          | 60                       | 150           | -18,434948823                 |
| 54   | 0,2        | 30              | 2.897                    | 1030   | -10        | 50                       | 31,6227766017 | -18,434948823                 |
| 55   | 0,2        | 30              | 2.927                    | 1020   | -10        | 40                       | 31,6227766017 | -9,462322208                  |
| 56   | 0,4        | 60              | 2.987                    | 1010   | -10        | 30                       | 60,827625303  | 4,76364169073                 |
| 57   | 0,8        | 120             | 3.107                    | 1020   | 10         | 40                       | 120,415945788 | 9,46232220803                 |
| 58   | 0,4        | 60              | 3.167                    | 1030   | 10         | 50                       | 60,827625303  | 12,5288077092                 |
| 59   | 0,3        | 45              | 3.212                    | 1040   | 10         | 60                       | 46,0977222865 | 5,44033203101                 |
| 60   | 0,7        | 105             | 3.317                    | 1050   | 10         | 70                       | 105,475115549 | -5,440332031                  |
| 61   | 0,7        | 105             | 3.422                    | 1040   | -10        | 60                       | 105,475115549 | -4,4846060095                 |
| 62   | 0,85       | 127,5           | 3.549                    | 1030   | -10        | 50                       | 127,891555624 | -23,962488975                 |
| 63   | 0,15       | 22,5            | 3.572                    | 1020   | -10        | 40                       | 24,6221445045 | -33,690067526                 |
| 64   | 0,1        | 15              | 3.587                    | 1010   | -10        | 30                       | 18,0277563773 | -23,962488975                 |
| 65   | 0,15       | 22,5            | 3.609                    | 1000   | -10        | 20                       | 24,6221445045 | -23,962488975                 |
| 66   | 0,15       | 22,5            | 3.632                    | 990    | -10        | 10                       | 24,6221445045 | -12,528807709                 |
| 67   | 0,3        | 45              | 3.677                    | 980    | -10        | 0                        | 46,0977222865 | -23,962488975                 |
| 68   | 0,15       | 22,5            | 3.699                    | 970    | -10        | -10                      | 24,6221445045 | 0                             |
| 69   | 0,15       | 22,5            | 3.722                    | 970    | 0          | -10                      | 22,5          | 14,9314171781                 |
| 70   | 0,25       | 37,5            | 3.759                    | 980    | 10         | 0                        | 38,8104367407 | 23,9624889746                 |
| 71   | 0,15       | 22,5            | 3.782                    | 990    | 10         | 10                       | 24,6221445045 | 20,3231368297                 |
| 72   | 0,18       | 27              | 3.809                    | 1000   | 10         | 20                       | 28,7923600978 | 12,5288077092                 |
| 73   | 0,3        | 45              | 3.854                    | 1010   | 10         | 30                       | 46,0977222865 | 23,9624889746                 |
| 74   | 0,15       | 22,5            | 3.876                    | 1020   | 10         | 40                       | 24,6221445045 | 18,4349488229                 |
| 75   | 0,2        | 30              | 3.906                    | 1030   | 10         | 50                       | 31,6227766017 | 23,9624889746                 |
| 76   | 0,15       | 22,5            | 3.929                    | 1040   | 10         | 60                       | 24,6221445045 | 33,690067526                  |
| 77   | 0,1        | 15              | 3.944                    | 1050   | 10         | 70                       | 18,0277563773 | 20,3231368297                 |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA     | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|---------------|-------------------------------|
| 78   | 0,18       | 27              | 3.971                    | 1060   | 10         | 80                       | 28,7923600978 | 9,46232220803                 |
| 79   | 0,4        | 60              | 4.031                    | 1070   | 10         | 90                       | 60,827625303  | 0                             |
| 80   | 0,45       | 67,5            | 4.098                    | 1070   | 0          | 90                       | 67,5          | 0                             |
| 81   | 0,3        | 45              | 4.143                    | 1070   | 0          | 90                       | 45            | 23,9624889746                 |
| 82   | 0,15       | 22,5            | 4.166                    | 1080   | 10         | 100                      | 24,6221445045 | 18,4349488229                 |
| 83   | 0,2        | 30              | 4.196                    | 1090   | 10         | 110                      | 31,6227766017 | 33,690067526                  |
| 84   | 0,1        | 15              | 4.211                    | 1100   | 10         | 120                      | 18,0277563773 | 23,9624889746                 |
| 85   | 0,15       | 22,5            | 4.233                    | 1110   | 10         | 130                      | 24,6221445045 | 12,5288077092                 |
| 86   | 0,3        | 45              | 4.278                    | 1120   | 10         | 140                      | 46,0977222865 | 9,46232220803                 |
| 87   | 0,4        | 60              | 4.338                    | 1130   | 10         | 150                      | 60,827625303  | 18,4349488229                 |
| 88   | 0,2        | 30              | 4.368                    | 1140   | 10         | 160                      | 31,6227766017 | 14,9314171781                 |
| 89   | 0,25       | 37,5            | 4.406                    | 1150   | 10         | 170                      | 38,8104367407 | 0                             |
| 90   | 0,8        | 120             | 4.526                    | 1150   | 0          | 170                      | 120           | -14,931417178                 |
| 91   | 0,25       | 37,5            | 4.563                    | 1140   | -10        | 160                      | 38,8104367407 | -11,768288932                 |
| 92   | 0,32       | 48              | 4.611                    | 1130   | -10        | 150                      | 49,0306026885 | 14,9314171781                 |
| 93   | 0,25       | 37,5            | 4.649                    | 1140   | 10         | 160                      | 38,8104367407 | 5,44033203101                 |
| 94   | 0,7        | 105             | 4.754                    | 1150   | 10         | 170                      | 105,475115549 | -8,4269690215                 |
| 95   | 0,45       | 67,5            | 4.821                    | 1140   | -10        | 160                      | 68,2367203198 | -12,528807709                 |
| 96   | 0,3        | 45              | 4.866                    | 1130   | -10        | 150                      | 46,0977222865 | -7,5946433686                 |
| 97   | 0,5        | 75              | 4.941                    | 1120   | -10        | 140                      | 75,6637297521 | -18,434948823                 |
| 98   | 0,2        | 30              | 4.971                    | 1110   | -10        | 130                      | 31,6227766017 | -33,690067526                 |
| 99   | 0,1        | 15              | 4.986                    | 1100   | -10        | 120                      | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 100  | 0,1        | 15              | 5.001                    | 1090   | -10        | 110                      | 18,0277563773 | -53,130102354                 |
| 101  | 0,05       | 7,5             | 5.009                    | 1080   | -10        | 100                      | 12,5          | -65,772254682                 |
| 102  | 0,03       | 4,5             | 5.013                    | 1070   | -10        | 90                       | 10,9658560997 | -33,690067526                 |
| 103  | 0,1        | 15              | 5.028                    | 1060   | -10        | 80                       | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 104  | 0,1        | 15              | 5.043                    | 1050   | -10        | 70                       | 18,0277563773 | -29,054604099                 |
| 105  | 0,12       | 18              | 5.061                    | 1040   | -10        | 60                       | 20,591260282  | -23,962488975                 |
| 106  | 0,15       | 22,5            | 5.084                    | 1030   | -10        | 50                       | 24,6221445045 | 0                             |
| 107  | 0,4        | 60              | 5.144                    | 1030   | 0          | 50                       | 60            | -33,690067526                 |
| 108  | 0,1        | 15              | 5.159                    | 1020   | -10        | 40                       | 18,0277563773 | 0                             |
| 109  | 0,4        | 60              | 5.219                    | 1020   | 0          | 40                       | 60            | -33,690067526                 |
| 110  | 0,1        | 15              | 5.234                    | 1010   | -10        | 30                       | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 111  | 0,1        | 15              | 5.249                    | 1000   | -10        | 20                       | 18,0277563773 | -20,32313683                  |
| 112  | 0,18       | 27              | 5.276                    | 990    | -10        | 10                       | 28,7923600978 | -23,962488975                 |
| 113  | 0,15       | 22,5            | 5.298                    | 980    | -10        | 0                        | 24,6221445045 | -18,434948823                 |
| 114  | 0,2        | 30              | 5.328                    | 970    | -10        | -10                      | 31,6227766017 | 0                             |
| 115  | 0,4        | 60              | 5.388                    | 970    | 0          | -10                      | 60            | -27,149681698                 |
| 116  | 0,13       | 19,5            | 5.408                    | 960    | -10        | -20                      | 21,9146070008 | -33,690067526                 |
| 117  | 0,1        | 15              | 5.423                    | 950    | -10        | -30                      | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 118  | 0,1        | 15              | 5.438                    | 940    | -10        | -40                      | 18,0277563773 | -23,962488975                 |
| 119  | 0,15       | 22,5            | 5.460                    | 930    | -10        | -50                      | 24,6221445045 | -18,434948823                 |
| 120  | 0,2        | 30              | 5.490                    | 920    | -10        | -60                      | 31,6227766017 | -14,931417178                 |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA     | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|---------------|-------------------------------|
| 121  | 0,25       | 37,5            | 5.528                    | 910    | -10        | -70                      | 38,8104367407 | 7,59464336859                 |
| 122  | 0,5        | 75              | 5.603                    | 920    | 10         | -60                      | 75,6637297521 | 23,9624889746                 |
| 123  | 0,15       | 22,5            | 5.625                    | 930    | 10         | -50                      | 24,6221445045 | 27,1496816978                 |
| 124  | 0,13       | 19,5            | 5.645                    | 940    | 10         | -40                      | 21,9146070008 | 0                             |
| 125  | 0,14       | 21              | 5.666                    | 940    | 0          | -40                      | 21            | 33,690067526                  |
| 126  | 0,1        | 15              | 5.681                    | 950    | 10         | -30                      | 18,0277563773 | 0                             |
| 127  | 0,3        | 45              | 5.726                    | 950    | 0          | -30                      | 45            | 33,690067526                  |
| 128  | 0,1        | 15              | 5.741                    | 960    | 10         | -20                      | 18,0277563773 | 29,0546040991                 |
| 129  | 0,12       | 18              | 5.759                    | 970    | 10         | -10                      | 20,591260282  | 53,1301023542                 |
| 130  | 0,05       | 7,5             | 5.766                    | 980    | 10         | 0                        | 12,5          | 0                             |
| 131  | 0,12       | 18              | 5.784                    | 980    | 0          | 0                        | 18            | 33,690067526                  |
| 132  | 0,1        | 15              | 5.799                    | 990    | 10         | 10                       | 18,0277563773 | 23,9624889746                 |
| 133  | 0,15       | 22,5            | 5.822                    | 1000   | 10         | 20                       | 24,6221445045 | 0                             |
| 134  | 0,2        | 30              | 5.852                    | 1000   | 0          | 20                       | 30            | -23,962488975                 |
| 135  | 0,15       | 22,5            | 5.874                    | 990    | -10        | 10                       | 24,6221445045 | -33,690067526                 |
| 136  | 0,1        | 15              | 5.889                    | 980    | -10        | 0                        | 18,0277563773 | -27,149681698                 |
| 137  | 0,13       | 19,5            | 5.909                    | 970    | -10        | -10                      | 21,9146070008 | 0                             |
| 138  | 0,4        | 60              | 5.969                    | 970    | 0          | -10                      | 60            | -27,149681698                 |
| 139  | 0,13       | 19,5            | 5.988                    | 960    | -10        | -20                      | 21,9146070008 | -81,46923439                  |
| 140  | 0,01       | 1,5             | 5.990                    | 950    | -10        | -30                      | 10,1118742081 | -73,300755766                 |
| 141  | 0,02       | 3               | 5.993                    | 940    | -10        | -40                      | 10,4403065089 | -23,962488975                 |
| 142  | 0,15       | 22,5            | 6.015                    | 930    | -10        | -50                      | 24,6221445045 | -20,32313683                  |
| 143  | 0,18       | 27              | 6.042                    | 920    | -10        | -60                      | 28,7923600978 | -33,690067526                 |
| 144  | 0,1        | 15              | 6.057                    | 910    | -10        | -70                      | 18,0277563773 | -12,528807709                 |
| 145  | 0,3        | 45              | 6.102                    | 900    | -10        | -80                      | 46,0977222865 | -18,434948823                 |
| 146  | 0,2        | 30              | 6.132                    | 890    | -10        | -90                      | 31,6227766017 | -18,434948823                 |
| 147  | 0,2        | 30              | 6.162                    | 880    | -10        | -100                     | 31,6227766017 | 0                             |
| 148  | 0,55       | 82,5            | 6.245                    | 880    | 0          | -100                     | 82,5          | -29,054604099                 |
| 149  | 0,12       | 18              | 6.263                    | 870    | -10        | -110                     | 20,591260282  | -18,434948823                 |
| 150  | 0,2        | 30              | 6.293                    | 860    | -10        | -120                     | 31,6227766017 | 0                             |
| 151  | 0,21       | 31,5            | 6.324                    | 860    | 0          | -120                     | 31,5          | 33,690067526                  |
| 152  | 0,1        | 15              | 6.339                    | 870    | 10         | -110                     | 18,0277563773 | 29,0546040991                 |
| 153  | 0,12       | 18              | 6.357                    | 880    | 10         | -100                     | 20,591260282  | 33,690067526                  |
| 154  | 0,1        | 15              | 6.372                    | 890    | 10         | -90                      | 18,0277563773 | 39,8055710923                 |
| 155  | 0,08       | 12              | 6.384                    | 900    | 10         | -80                      | 15,6204993518 | 23,9624889746                 |
| 156  | 0,15       | 22,5            | 6.407                    | 910    | 10         | -70                      | 24,6221445045 | 33,690067526                  |
| 157  | 0,1        | 15              | 6.422                    | 920    | 10         | -60                      | 18,0277563773 | 33,690067526                  |
| 158  | 0,1        | 15              | 6.437                    | 930    | 10         | -50                      | 18,0277563773 | 33,690067526                  |
| 159  | 0,1        | 15              | 6.452                    | 940    | 10         | -40                      | 18,0277563773 | 29,0546040991                 |
| 160  | 0,12       | 18              | 6.470                    | 950    | 10         | -30                      | 20,591260282  | 20,3231368297                 |
| 161  | 0,18       | 27              | 6.497                    | 960    | 10         | -20                      | 28,7923600978 | 29,0546040991                 |
| 162  | 0,12       | 18              | 6.515                    | 970    | 10         | -10                      | 20,591260282  | 23,9624889746                 |
| 163  | 0,15       | 22,5            | 6.537                    | 980    | 10         | 0                        | 24,6221445045 | 29,0546040991                 |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA     | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|---------------|-------------------------------|
| 164  | 0,12       | 18              | 6.555                    | 990    | 10         | 10                       | 20,591260282  | 20,3231368297                 |
| 165  | 0,18       | 27              | 6.582                    | 1000   | 10         | 20                       | 28,7923600978 | 29,0546040991                 |
| 166  | 0,12       | 18              | 6.600                    | 1010   | 10         | 30                       | 20,591260282  | 18,4349488229                 |
| 167  | 0,2        | 30              | 6.630                    | 1020   | 10         | 40                       | 31,6227766017 | 23,9624889746                 |
| 168  | 0,15       | 22,5            | 6.653                    | 1030   | 10         | 50                       | 24,6221445045 | 18,4349488229                 |
| 169  | 0,2        | 30              | 6.683                    | 1040   | 10         | 60                       | 31,6227766017 | 33,690067526                  |
| 170  | 0,1        | 15              | 6.698                    | 1050   | 10         | 70                       | 18,0277563773 | 12,5288077092                 |
| 171  | 0,3        | 45              | 6.743                    | 1060   | 10         | 80                       | 46,0977222865 | 18,4349488229                 |
| 172  | 0,2        | 30              | 6.773                    | 1070   | 10         | 90                       | 31,6227766017 | 27,1496816978                 |
| 173  | 0,13       | 19,5            | 6.792                    | 1080   | 10         | 100                      | 21,9146070008 | 0                             |
| 174  | 0,3        | 45              | 6.837                    | 1080   | 0          | 100                      | 45            | -23,962488975                 |
| 175  | 0,15       | 22,5            | 6.860                    | 1070   | -10        | 90                       | 24,6221445045 | -20,32313683                  |
| 176  | 0,18       | 27              | 6.887                    | 1060   | -10        | 80                       | 28,7923600978 | -33,690067526                 |
| 177  | 0,1        | 15              | 6.902                    | 1050   | -10        | 70                       | 18,0277563773 | -14,931417178                 |
| 178  | 0,25       | 37,5            | 6.939                    | 1040   | -10        | 60                       | 38,8104367407 | -18,434948823                 |
| 179  | 0,2        | 30              | 6.969                    | 1030   | -10        | 50                       | 31,6227766017 | -9,462322208                  |
| 180  | 0,4        | 60              | 7.029                    | 1020   | -10        | 40                       | 60,827625303  | 0                             |
| 181  | 0,4        | 60              | 7.089                    | 1020   | 0          | 40                       | 60            | 12,5288077092                 |
| 182  | 0,3        | 45              | 7.134                    | 1030   | 10         | 50                       | 46,0977222865 | -10,784297868                 |
| 183  | 0,35       | 52,5            | 7.187                    | 1020   | -10        | 40                       | 53,4438958161 | 29,0546040991                 |
| 184  | 0,12       | 18              | 7.205                    | 1030   | 10         | 50                       | 20,591260282  | 18,4349488229                 |
| 185  | 0,2        | 30              | 7.235                    | 1040   | 10         | 60                       | 31,6227766017 | 0                             |
| 186  | 0,3        | 45              | 7.280                    | 1040   | 0          | 60                       | 45            | -23,962488975                 |
| 187  | 0,15       | 22,5            | 7.302                    | 1030   | -10        | 50                       | 24,6221445045 | -29,054604099                 |
| 188  | 0,12       | 18              | 7.320                    | 1020   | -10        | 40                       | 20,591260282  | -33,690067526                 |
| 189  | 0,1        | 15              | 7.335                    | 1010   | -10        | 30                       | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 190  | 0,1        | 15              | 7.350                    | 1000   | -10        | 20                       | 18,0277563773 | -18,434948823                 |
| 191  | 0,2        | 30              | 7.380                    | 990    | -10        | 10                       | 31,6227766017 | -33,690067526                 |
| 192  | 0,1        | 15              | 7.395                    | 980    | -10        | 0                        | 18,0277563773 | 0                             |
| 193  | 0,15       | 22,5            | 7.418                    | 980    | 0          | 0                        | 22,5          | 29,0546040991                 |
| 194  | 0,12       | 18              | 7.436                    | 990    | 10         | 10                       | 20,591260282  | 23,9624889746                 |
| 195  | 0,15       | 22,5            | 7.458                    | 1000   | 10         | 20                       | 24,6221445045 | 29,0546040991                 |
| 196  | 0,12       | 18              | 7.476                    | 1010   | 10         | 30                       | 20,591260282  | 33,690067526                  |
| 197  | 0,1        | 15              | 7.491                    | 1020   | 10         | 40                       | 18,0277563773 | 39,8055710923                 |
| 198  | 0,08       | 12              | 7.503                    | 1030   | 10         | 50                       | 15,6204993518 | 20,3231368297                 |
| 199  | 0,18       | 27              | 7.530                    | 1040   | 10         | 60                       | 28,7923600978 | 29,0546040991                 |
| 200  | 0,12       | 18              | 7.548                    | 1050   | 10         | 70                       | 20,591260282  | 18,4349488229                 |
| 201  | 0,2        | 30              | 7.578                    | 1060   | 10         | 80                       | 31,6227766017 | 23,9624889746                 |
| 202  | 0,15       | 22,5            | 7.601                    | 1070   | 10         | 90                       | 24,6221445045 | 23,9624889746                 |
| 203  | 0,15       | 22,5            | 7.623                    | 1080   | 10         | 100                      | 24,6221445045 | 13,3924977538                 |
| 204  | 0,28       | 42              | 7.665                    | 1090   | 10         | 110                      | 43,1740662898 | 0                             |
| 205  | 0,5        | 75              | 7.740                    | 1090   | 0          | 110                      | 75            | -7,5946433686                 |
| 206  | 0,25       | 37,5            | 7.778                    | 1085   | -5         | 105                      | 37,8318648761 | 7,59464336859                 |

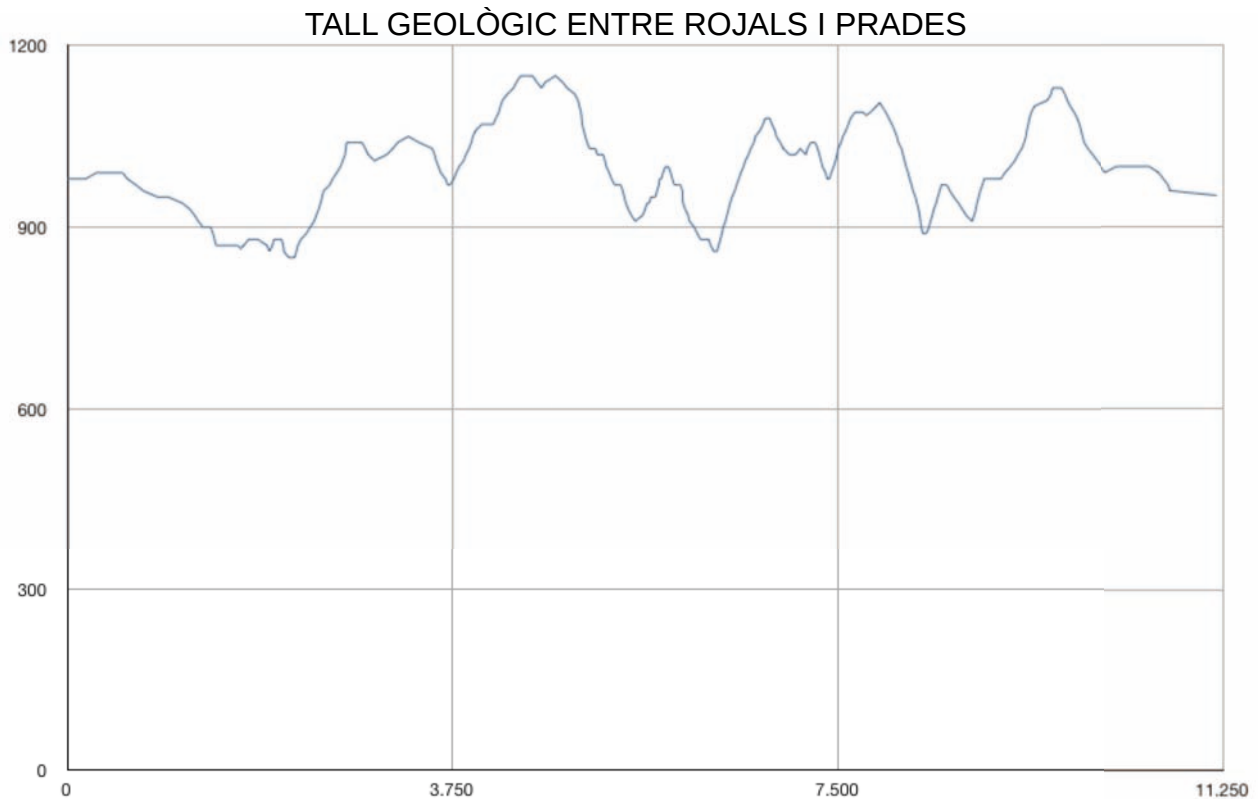
EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA     | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|---------------|-------------------------------|
| 207  | 0,25       | 37,5            | 7.815                    | 1090   | 5          | 110                      | 37,8318648761 | 9,46232220803                 |
| 208  | 0,4        | 60              | 7.875                    | 1100   | 10         | 120                      | 60,827625303  | 11,309932474                  |
| 209  | 0,2        | 30              | 7.905                    | 1106   | 6          | 126                      | 30,5941170816 | -14,931417178                 |
| 210  | 0,15       | 22,5            | 7.928                    | 1100   | -6         | 120                      | 23,2862620444 | -14,931417178                 |
| 211  | 0,25       | 37,5            | 7.965                    | 1090   | -10        | 110                      | 38,8104367407 | -18,434948823                 |
| 212  | 0,2        | 30              | 7.995                    | 1080   | -10        | 100                      | 31,6227766017 | -18,434948823                 |
| 213  | 0,2        | 30              | 8.025                    | 1070   | -10        | 90                       | 31,6227766017 | -21,412969475                 |
| 214  | 0,17       | 25,5            | 8.051                    | 1060   | -10        | 80                       | 27,3906918496 | -23,962488975                 |
| 215  | 0,15       | 22,5            | 8.073                    | 1050   | -10        | 70                       | 24,6221445045 | -33,690067526                 |
| 216  | 0,1        | 15              | 8.088                    | 1040   | -10        | 60                       | 18,0277563773 | -18,434948823                 |
| 217  | 0,2        | 30              | 8.118                    | 1030   | -10        | 50                       | 31,6227766017 | -33,690067526                 |
| 218  | 0,1        | 15              | 8.133                    | 1020   | -10        | 40                       | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 219  | 0,1        | 15              | 8.148                    | 1010   | -10        | 30                       | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 220  | 0,1        | 15              | 8.163                    | 1000   | -10        | 20                       | 18,0277563773 | -27,149681698                 |
| 221  | 0,13       | 19,5            | 8.183                    | 990    | -10        | 10                       | 21,9146070008 | -33,690067526                 |
| 222  | 0,1        | 15              | 8.198                    | 980    | -10        | 0                        | 18,0277563773 | -29,054604099                 |
| 223  | 0,12       | 18              | 8.216                    | 970    | -10        | -10                      | 20,591260282  | -33,690067526                 |
| 224  | 0,1        | 15              | 8.231                    | 960    | -10        | -20                      | 18,0277563773 | -23,962488975                 |
| 225  | 0,15       | 22,5            | 8.253                    | 950    | -10        | -30                      | 24,6221445045 | -33,690067526                 |
| 226  | 0,1        | 15              | 8.268                    | 940    | -10        | -40                      | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 227  | 0,1        | 15              | 8.283                    | 930    | -10        | -50                      | 18,0277563773 | -39,805571092                 |
| 228  | 0,08       | 12              | 8.295                    | 920    | -10        | -60                      | 15,6204993518 | -53,130102354                 |
| 229  | 0,05       | 7,5             | 8.303                    | 910    | -10        | -70                      | 12,5          | -53,130102354                 |
| 230  | 0,05       | 7,5             | 8.310                    | 900    | -10        | -80                      | 12,5          | -33,690067526                 |
| 231  | 0,1        | 15              | 8.325                    | 890    | -10        | -90                      | 18,0277563773 | 0                             |
| 232  | 0,25       | 37,5            | 8.363                    | 890    | 0          | -90                      | 37,5          | 23,9624889746                 |
| 233  | 0,15       | 22,5            | 8.385                    | 900    | 10         | -80                      | 24,6221445045 | 33,690067526                  |
| 234  | 0,1        | 15              | 8.400                    | 910    | 10         | -70                      | 18,0277563773 | 29,0546040991                 |
| 235  | 0,12       | 18              | 8.418                    | 920    | 10         | -60                      | 20,591260282  | 33,690067526                  |
| 236  | 0,1        | 15              | 8.433                    | 930    | 10         | -50                      | 18,0277563773 | 23,9624889746                 |
| 237  | 0,15       | 22,5            | 8.456                    | 940    | 10         | -40                      | 24,6221445045 | 33,690067526                  |
| 238  | 0,1        | 15              | 8.471                    | 950    | 10         | -30                      | 18,0277563773 | 29,0546040991                 |
| 239  | 0,12       | 18              | 8.489                    | 960    | 10         | -20                      | 20,591260282  | 29,0546040991                 |
| 240  | 0,12       | 18              | 8.507                    | 970    | 10         | -10                      | 20,591260282  | 0                             |
| 241  | 0,35       | 52,5            | 8.559                    | 970    | 0          | -10                      | 52,5          | -18,434948823                 |
| 242  | 0,2        | 30              | 8.589                    | 960    | -10        | -20                      | 31,6227766017 | -14,931417178                 |
| 243  | 0,25       | 37,5            | 8.627                    | 950    | -10        | -30                      | 38,8104367407 | -12,528807709                 |
| 244  | 0,3        | 45              | 8.672                    | 940    | -10        | -40                      | 46,0977222865 | -14,931417178                 |
| 245  | 0,25       | 37,5            | 8.709                    | 930    | -10        | -50                      | 38,8104367407 | -14,931417178                 |
| 246  | 0,25       | 37,5            | 8.747                    | 920    | -10        | -60                      | 38,8104367407 | -9,950626688                  |
| 247  | 0,38       | 57              | 8.804                    | 910    | -10        | -70                      | 57,8705451849 | 23,9624889746                 |
| 248  | 0,15       | 22,5            | 8.826                    | 920    | 10         | -60                      | 24,6221445045 | 33,690067526                  |
| 249  | 0,1        | 15              | 8.841                    | 930    | 10         | -50                      | 18,0277563773 | 39,8055710923                 |

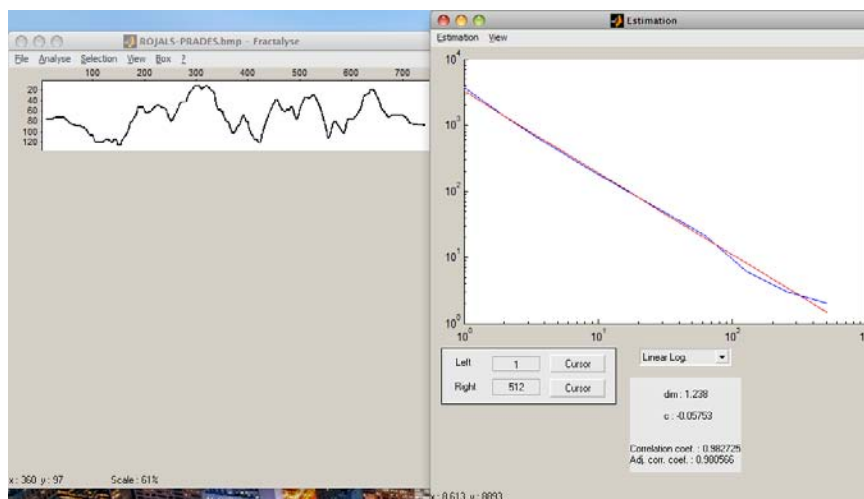
EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA     | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|---------------|-------------------------------|
| 250  | 0,08       | 12              | 8.853                    | 940    | 10         | -40                      | 15,6204993518 | 33,690067526                  |
| 251  | 0,1        | 15              | 8.868                    | 950    | 10         | -30                      | 18,0277563773 | 33,690067526                  |
| 252  | 0,1        | 15              | 8.883                    | 960    | 10         | -20                      | 18,0277563773 | 23,9624889746                 |
| 253  | 0,15       | 22,5            | 8.906                    | 970    | 10         | -10                      | 24,6221445045 | 33,690067526                  |
| 254  | 0,1        | 15              | 8.921                    | 980    | 10         | 0                        | 18,0277563773 | 0                             |
| 255  | 1,1        | 165             | 9.086                    | 980    | 0          | 0                        | 165           | 14,9314171781                 |
| 256  | 0,25       | 37,5            | 9.123                    | 990    | 10         | 10                       | 38,8104367407 | 10,7842978676                 |
| 257  | 0,35       | 52,5            | 9.176                    | 1000   | 10         | 20                       | 53,4438958161 | 12,5288077092                 |
| 258  | 0,3        | 45              | 9.221                    | 1010   | 10         | 30                       | 46,0977222865 | 18,4349488229                 |
| 259  | 0,2        | 30              | 9.251                    | 1020   | 10         | 40                       | 31,6227766017 | 14,9314171781                 |
| 260  | 0,25       | 37,5            | 9.288                    | 1030   | 10         | 50                       | 38,8104367407 | 23,9624889746                 |
| 261  | 0,15       | 22,5            | 9.311                    | 1040   | 10         | 60                       | 24,6221445045 | 29,0546040991                 |
| 262  | 0,12       | 18              | 9.329                    | 1050   | 10         | 70                       | 20,591260282  | 53,1301023542                 |
| 263  | 0,05       | 7,5             | 9.336                    | 1060   | 10         | 80                       | 12,5          | 33,690067526                  |
| 264  | 0,1        | 15              | 9.351                    | 1070   | 10         | 90                       | 18,0277563773 | 39,8055710923                 |
| 265  | 0,08       | 12              | 9.363                    | 1080   | 10         | 100                      | 15,6204993518 | 29,0546040991                 |
| 266  | 0,12       | 18              | 9.381                    | 1090   | 10         | 110                      | 20,591260282  | 18,4349488229                 |
| 267  | 0,2        | 30              | 9.411                    | 1100   | 10         | 120                      | 31,6227766017 | 4,48460600954                 |
| 268  | 0,85       | 127,5           | 9.539                    | 1110   | 10         | 130                      | 127,891555624 | 16,8583987677                 |
| 269  | 0,22       | 33              | 9.572                    | 1120   | 10         | 140                      | 34,4818792991 | 33,690067526                  |
| 270  | 0,1        | 15              | 9.587                    | 1130   | 10         | 150                      | 18,0277563773 | 0                             |
| 271  | 0,6        | 90              | 9.677                    | 1130   | 0          | 150                      | 90            | -18,434948823                 |
| 272  | 0,2        | 30              | 9.707                    | 1120   | -10        | 140                      | 31,6227766017 | -23,962488975                 |
| 273  | 0,15       | 22,5            | 9.729                    | 1110   | -10        | 130                      | 24,6221445045 | -18,434948823                 |
| 274  | 0,2        | 30              | 9.759                    | 1100   | -10        | 120                      | 31,6227766017 | -14,931417178                 |
| 275  | 0,25       | 37,5            | 9.797                    | 1090   | -10        | 110                      | 38,8104367407 | -18,434948823                 |
| 276  | 0,2        | 30              | 9.827                    | 1080   | -10        | 100                      | 31,6227766017 | -23,962488975                 |
| 277  | 0,15       | 22,5            | 9.849                    | 1070   | -10        | 90                       | 24,6221445045 | -33,690067526                 |
| 278  | 0,1        | 15              | 9.864                    | 1060   | -10        | 80                       | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 279  | 0,1        | 15              | 9.879                    | 1050   | -10        | 70                       | 18,0277563773 | -33,690067526                 |
| 280  | 0,1        | 15              | 9.894                    | 1040   | -10        | 60                       | 18,0277563773 | -14,931417178                 |
| 281  | 0,25       | 37,5            | 9.932                    | 1030   | -10        | 50                       | 38,8104367407 | -12,528807709                 |
| 282  | 0,3        | 45              | 9.977                    | 1020   | -10        | 40                       | 46,0977222865 | -12,528807709                 |
| 283  | 0,3        | 45              | 10.022                   | 1010   | -10        | 30                       | 46,0977222865 | -12,528807709                 |
| 284  | 0,3        | 45              | 10.067                   | 1000   | -10        | 20                       | 46,0977222865 | -12,528807709                 |
| 285  | 0,3        | 45              | 10.112                   | 990    | -10        | 10                       | 46,0977222865 | 5,07960786001                 |
| 286  | 0,75       | 112,5           | 10.224                   | 1000   | 10         | 20                       | 112,943569981 | 0                             |
| 287  | 2,1        | 315             | 10.539                   | 1000   | 0          | 20                       | 315           | -6,3401917459                 |
| 288  | 0,6        | 90              | 10.629                   | 990    | -10        | 10                       | 90,5538513814 | -12,528807709                 |
| 289  | 0,3        | 45              | 10.674                   | 980    | -10        | 0                        | 46,0977222865 | -12,528807709                 |
| 290  | 0,3        | 45              | 10.719                   | 970    | -10        | -10                      | 46,0977222865 | -23,962488975                 |
| 291  | 0,15       | 22,5            | 10.742                   | 960    | -10        | -20                      | 24,6221445045 | -1,0184843477                 |
| 292  | 3          | 450             | 11.192                   | 952    | -8         | -28                      | 450,071105493 | 0                             |

D'aquesta taula n'obtenim el tall geològic relacionant l' $\Delta x$  acumulat real i l'alçada (metres):



Al introduir aquest contorn al programa, aquest ens diu que la dimensió fractal és 1,238



La dimensió fractal entre Rojals i Prades és 1,238, això vol dir que la muntanya és força rugosa i manté certa semblança amb un fractal, aquesta dimensió és pròxima a la dimensió de la corba de Koch o floc de neu de Koch, la dimensió del qual és 1,2083.

*Dimensió fractal entre l'Esplugu de Francolí i Reials*

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 1    | 0          | 0               | 0                        | 410    | 0          | 0                        | 0            | 2,93567344642                 |
| 2    | 1,3        | 195             | 195                      | 420    | 10         | 10                       | 195,2562419  | 6,34019174591                 |
| 3    | 0,6        | 90              | 285                      | 430    | 10         | 20                       | 90,553851381 | 4,23639479906                 |
| 4    | 0,9        | 135             | 420                      | 440    | 10         | 30                       | 135,36986371 | 4,76364169073                 |
| 5    | 0,8        | 120             | 540                      | 450    | 10         | 40                       | 120,41594579 | 5,44033203101                 |
| 6    | 0,7        | 105             | 645                      | 460    | 10         | 50                       | 105,47511555 | 9,46232220803                 |
| 7    | 0,4        | 60              | 705                      | 470    | 10         | 60                       | 60,827625303 | 7,59464336859                 |
| 8    | 0,5        | 75              | 780                      | 480    | 10         | 70                       | 75,663729752 | 8,42696902148                 |
| 9    | 0,45       | 67,5            | 848                      | 490    | 10         | 80                       | 68,23672032  | 9,46232220803                 |
| 10   | 0,4        | 60              | 908                      | 500    | 10         | 90                       | 60,827625303 | 12,5288077092                 |
| 11   | 0,3        | 45              | 953                      | 510    | 10         | 100                      | 46,097722286 | 12,5288077092                 |
| 12   | 0,3        | 45              | 998                      | 520    | 10         | 110                      | 46,097722286 | 10,7842978676                 |
| 13   | 0,35       | 52,5            | 1.050                    | 530    | 10         | 120                      | 53,443895816 | 18,4349488229                 |
| 14   | 0,2        | 30              | 1.080                    | 540    | 10         | 130                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 15   | 0,15       | 22,5            | 1.103                    | 550    | 10         | 140                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 16   | 0,15       | 22,5            | 1.125                    | 560    | 10         | 150                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 17   | 0,2        | 30              | 1.155                    | 570    | 10         | 160                      | 31,622776602 | 10,7842978676                 |
| 18   | 0,35       | 52,5            | 1.208                    | 580    | 10         | 170                      | 53,443895816 | 0                             |
| 19   | 0,8        | 120             | 1.328                    | 580    | 0          | 170                      | 120          | 18,4349488229                 |
| 20   | 0,2        | 30              | 1.358                    | 590    | 10         | 180                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 21   | 0,15       | 22,5            | 1.380                    | 600    | 10         | 190                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 22   | 0,15       | 22,5            | 1.403                    | 610    | 10         | 200                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 23   | 0,2        | 30              | 1.433                    | 620    | 10         | 210                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 24   | 0,15       | 22,5            | 1.455                    | 630    | 10         | 220                      | 24,622144504 | 33,690067526                  |
| 25   | 0,1        | 15              | 1.470                    | 640    | 10         | 230                      | 18,027756377 | 18,4349488229                 |
| 26   | 0,2        | 30              | 1.500                    | 650    | 10         | 240                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 27   | 0,15       | 22,5            | 1.523                    | 660    | 10         | 250                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 28   | 0,2        | 30              | 1.553                    | 670    | 10         | 260                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 29   | 0,2        | 30              | 1.583                    | 680    | 10         | 270                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 30   | 0,2        | 30              | 1.613                    | 690    | 10         | 280                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 31   | 0,15       | 22,5            | 1.635                    | 700    | 10         | 290                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 32   | 0,2        | 30              | 1.665                    | 710    | 10         | 300                      | 31,622776602 | 29,0546040991                 |
| 33   | 0,12       | 18              | 1.683                    | 720    | 10         | 310                      | 20,591260282 | 18,4349488229                 |
| 34   | 0,2        | 30              | 1.713                    | 730    | 10         | 320                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 35   | 0,2        | 30              | 1.743                    | 740    | 10         | 330                      | 31,622776602 | -9,462322208                  |
| 36   | 0,4        | 60              | 1.803                    | 730    | -10        | 320                      | 60,827625303 | -6,3401917459                 |
| 37   | 0,6        | 90              | 1.893                    | 720    | -10        | 310                      | 90,553851381 | -18,434948823                 |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 38   | 0,2        | 30              | 1.923                    | 710    | -10        | 300                      | 31,622776602 | -23,962488975                 |
| 39   | 0,15       | 22,5            | 1.946                    | 700    | -10        | 290                      | 24,622144504 | -33,690067526                 |
| 40   | 0,1        | 15              | 1.961                    | 690    | -10        | 280                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 41   | 0,1        | 15              | 1.976                    | 680    | -10        | 270                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 42   | 0,1        | 15              | 1.991                    | 670    | -10        | 260                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 43   | 0,1        | 15              | 2.006                    | 660    | -10        | 250                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 44   | 0,1        | 15              | 2.021                    | 650    | -10        | 240                      | 18,027756377 | 0                             |
| 45   | 0,2        | 30              | 2.051                    | 650    | 0          | 240                      | 30           | -18,434948823                 |
| 46   | 0,2        | 30              | 2.081                    | 640    | -10        | 230                      | 31,622776602 | -33,690067526                 |
| 47   | 0,1        | 15              | 2.096                    | 630    | -10        | 220                      | 18,027756377 | -18,434948823                 |
| 48   | 0,2        | 30              | 2.126                    | 620    | -10        | 210                      | 31,622776602 | 9,46232220803                 |
| 49   | 0,4        | 60              | 2.186                    | 630    | 10         | 220                      | 60,827625303 | 14,9314171781                 |
| 50   | 0,25       | 37,5            | 2.223                    | 640    | 10         | 230                      | 38,810436741 | -10,784297868                 |
| 51   | 0,35       | 52,5            | 2.276                    | 630    | -10        | 220                      | 53,443895816 | -14,931417178                 |
| 52   | 0,25       | 37,5            | 2.313                    | 620    | -10        | 210                      | 38,810436741 | -33,690067526                 |
| 53   | 0,1        | 15              | 2.328                    | 610    | -10        | 200                      | 18,027756377 | -18,434948823                 |
| 54   | 0,2        | 30              | 2.358                    | 600    | -10        | 190                      | 31,622776602 | -23,962488975                 |
| 55   | 0,15       | 22,5            | 2.381                    | 590    | -10        | 180                      | 24,622144504 | 0                             |
| 56   | 0,4        | 60              | 2.441                    | 590    | 0          | 180                      | 60           | 18,4349488229                 |
| 57   | 0,2        | 30              | 2.471                    | 600    | 10         | 190                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 58   | 0,15       | 22,5            | 2.493                    | 610    | 10         | 200                      | 24,622144504 | 14,9314171781                 |
| 59   | 0,25       | 37,5            | 2.531                    | 620    | 10         | 210                      | 38,810436741 | 23,9624889746                 |
| 60   | 0,15       | 22,5            | 2.553                    | 630    | 10         | 220                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 61   | 0,2        | 30              | 2.583                    | 640    | 10         | 230                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 62   | 0,15       | 22,5            | 2.606                    | 650    | 10         | 240                      | 24,622144504 | 0                             |
| 63   | 0,6        | 90              | 2.696                    | 650    | 0          | 240                      | 90           | 14,9314171781                 |
| 64   | 0,25       | 37,5            | 2.733                    | 660    | 10         | 250                      | 38,810436741 | 9,46232220803                 |
| 65   | 0,4        | 60              | 2.793                    | 670    | 10         | 260                      | 60,827625303 | 20,3231368297                 |
| 66   | 0,18       | 27              | 2.820                    | 680    | 10         | 270                      | 28,792360098 | 18,4349488229                 |
| 67   | 0,2        | 30              | 2.850                    | 690    | 10         | 280                      | 31,622776602 | 29,0546040991                 |
| 68   | 0,12       | 18              | 2.868                    | 700    | 10         | 290                      | 20,591260282 | 23,9624889746                 |
| 69   | 0,15       | 22,5            | 2.891                    | 710    | 10         | 300                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 70   | 0,15       | 22,5            | 2.913                    | 720    | 10         | 310                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 71   | 0,15       | 22,5            | 2.936                    | 730    | 10         | 320                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 72   | 0,15       | 22,5            | 2.958                    | 740    | 10         | 330                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 73   | 0,15       | 22,5            | 2.981                    | 750    | 10         | 340                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 74   | 0,15       | 22,5            | 3.003                    | 760    | 10         | 350                      | 24,622144504 | 29,0546040991                 |
| 75   | 0,12       | 18              | 3.021                    | 770    | 10         | 360                      | 20,591260282 | 23,9624889746                 |
| 76   | 0,15       | 22,5            | 3.044                    | 780    | 10         | 370                      | 24,622144504 | 33,690067526                  |
| 77   | 0,1        | 15              | 3.059                    | 790    | 10         | 380                      | 18,027756377 | 20,3231368297                 |
| 78   | 0,18       | 27              | 3.086                    | 800    | 10         | 390                      | 28,792360098 | 39,8055710923                 |
| 79   | 0,08       | 12              | 3.098                    | 810    | 10         | 400                      | 15,620499352 | 23,9624889746                 |
| 80   | 0,15       | 22,5            | 3.120                    | 820    | 10         | 410                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

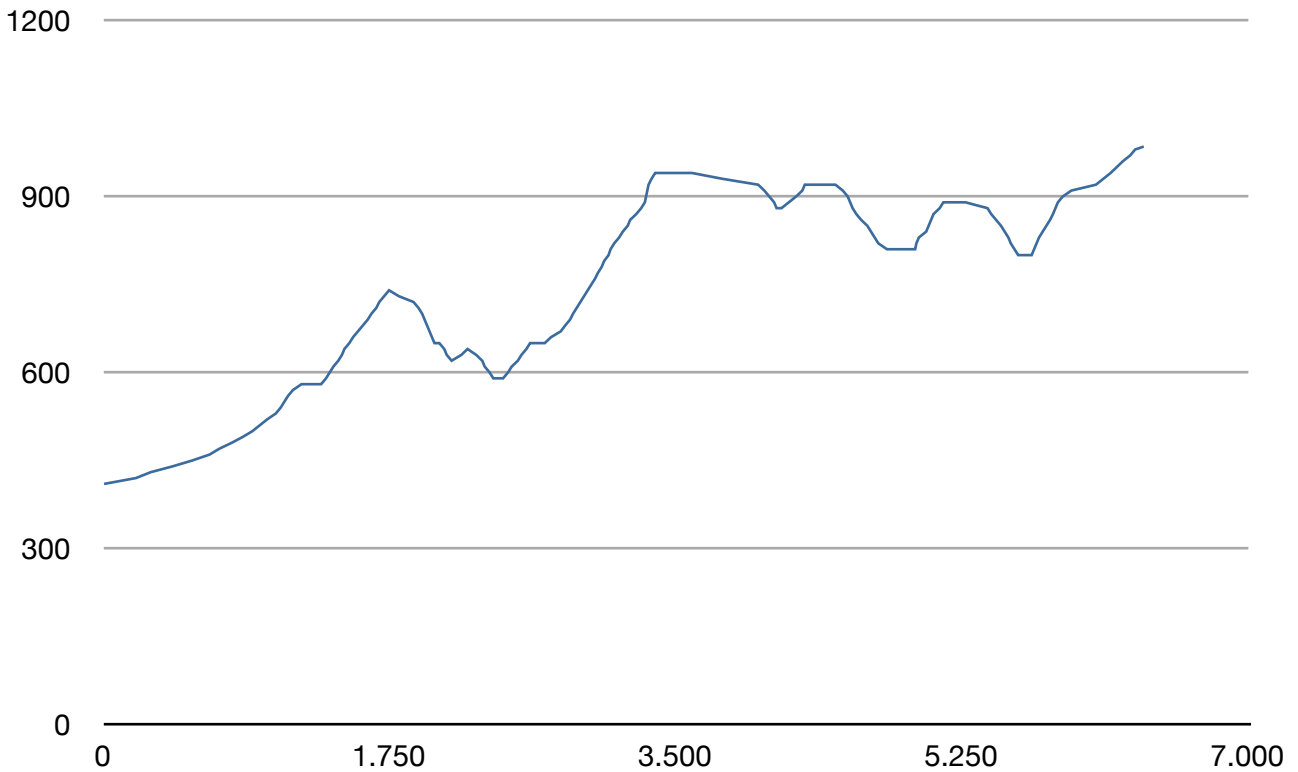
| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 81   | 0,2        | 30              | 3.150                    | 830    | 10         | 420                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 82   | 0,15       | 22,5            | 3.173                    | 840    | 10         | 430                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 83   | 0,2        | 30              | 3.203                    | 850    | 10         | 440                      | 31,622776602 | 33,690067526                  |
| 84   | 0,1        | 15              | 3.218                    | 860    | 10         | 450                      | 18,027756377 | 14,9314171781                 |
| 85   | 0,25       | 37,5            | 3.255                    | 870    | 10         | 460                      | 38,810436741 | 18,4349488229                 |
| 86   | 0,2        | 30              | 3.285                    | 880    | 10         | 470                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 87   | 0,15       | 22,5            | 3.308                    | 890    | 10         | 480                      | 24,622144504 | 53,1301023542                 |
| 88   | 0,05       | 7,5             | 3.315                    | 900    | 10         | 490                      | 12,5         | 53,1301023542                 |
| 89   | 0,05       | 7,5             | 3.323                    | 910    | 10         | 500                      | 12,5         | 53,1301023542                 |
| 90   | 0,05       | 7,5             | 3.330                    | 920    | 10         | 510                      | 12,5         | 29,0546040991                 |
| 91   | 0,12       | 18              | 3.348                    | 930    | 10         | 520                      | 20,591260282 | 23,9624889746                 |
| 92   | 0,15       | 22,5            | 3.371                    | 940    | 10         | 530                      | 24,622144504 | 0                             |
| 93   | 1,5        | 225             | 3.596                    | 940    | 0          | 530                      | 225          | -3,0528825148                 |
| 94   | 1,25       | 187,5           | 3.783                    | 930    | -10        | 520                      | 187,76647731 | -2,632434869                  |
| 95   | 1,45       | 217,5           | 4.001                    | 920    | -10        | 510                      | 217,7297637  | -14,931417178                 |
| 96   | 0,25       | 37,5            | 4.038                    | 910    | -10        | 500                      | 38,810436741 | -18,434948823                 |
| 97   | 0,2        | 30              | 4.068                    | 900    | -10        | 490                      | 31,622776602 | -18,434948823                 |
| 98   | 0,2        | 30              | 4.098                    | 890    | -10        | 480                      | 31,622776602 | -33,690067526                 |
| 99   | 0,1        | 15              | 4.113                    | 880    | -10        | 470                      | 18,027756377 | 0                             |
| 100  | 0,2        | 30              | 4.143                    | 880    | 0          | 470                      | 30           | 12,5288077092                 |
| 101  | 0,3        | 45              | 4.188                    | 890    | 10         | 480                      | 46,097722286 | 12,5288077092                 |
| 102  | 0,3        | 45              | 4.233                    | 900    | 10         | 490                      | 46,097722286 | 14,9314171781                 |
| 103  | 0,25       | 37,5            | 4.271                    | 910    | 10         | 500                      | 38,810436741 | 33,690067526                  |
| 104  | 0,1        | 15              | 4.286                    | 920    | 10         | 510                      | 18,027756377 | 0                             |
| 105  | 1,25       | 187,5           | 4.473                    | 920    | 0          | 510                      | 187,5        | -12,528807709                 |
| 106  | 0,3        | 45              | 4.518                    | 910    | -10        | 500                      | 46,097722286 | -18,434948823                 |
| 107  | 0,2        | 30              | 4.548                    | 900    | -10        | 490                      | 31,622776602 | -33,690067526                 |
| 108  | 0,1        | 15              | 4.563                    | 890    | -10        | 480                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 109  | 0,1        | 15              | 4.578                    | 880    | -10        | 470                      | 18,027756377 | -23,962488975                 |
| 110  | 0,15       | 22,5            | 4.601                    | 870    | -10        | 460                      | 24,622144504 | -18,434948823                 |
| 111  | 0,2        | 30              | 4.631                    | 860    | -10        | 450                      | 31,622776602 | -14,931417178                 |
| 112  | 0,25       | 37,5            | 4.668                    | 850    | -10        | 440                      | 38,810436741 | -23,962488975                 |
| 113  | 0,15       | 22,5            | 4.691                    | 840    | -10        | 430                      | 24,622144504 | -23,962488975                 |
| 114  | 0,15       | 22,5            | 4.713                    | 830    | -10        | 420                      | 24,622144504 | -23,962488975                 |
| 115  | 0,15       | 22,5            | 4.736                    | 820    | -10        | 410                      | 24,622144504 | -10,784297868                 |
| 116  | 0,35       | 52,5            | 4.788                    | 810    | -10        | 400                      | 53,443895816 | 0                             |
| 117  | 1,15       | 172,5           | 4.961                    | 810    | 0          | 400                      | 172,5        | 53,1301023542                 |
| 118  | 0,05       | 7,5             | 4.968                    | 820    | 10         | 410                      | 12,5         | 33,690067526                  |
| 119  | 0,1        | 15              | 4.983                    | 830    | 10         | 420                      | 18,027756377 | 12,5288077092                 |
| 120  | 0,3        | 45              | 5.028                    | 840    | 10         | 430                      | 46,097722286 | 33,690067526                  |
| 121  | 0,1        | 15              | 5.043                    | 850    | 10         | 440                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 122  | 0,1        | 15              | 5.058                    | 860    | 10         | 450                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 123  | 0,1        | 15              | 5.073                    | 870    | 10         | 460                      | 18,027756377 | 14,9314171781                 |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

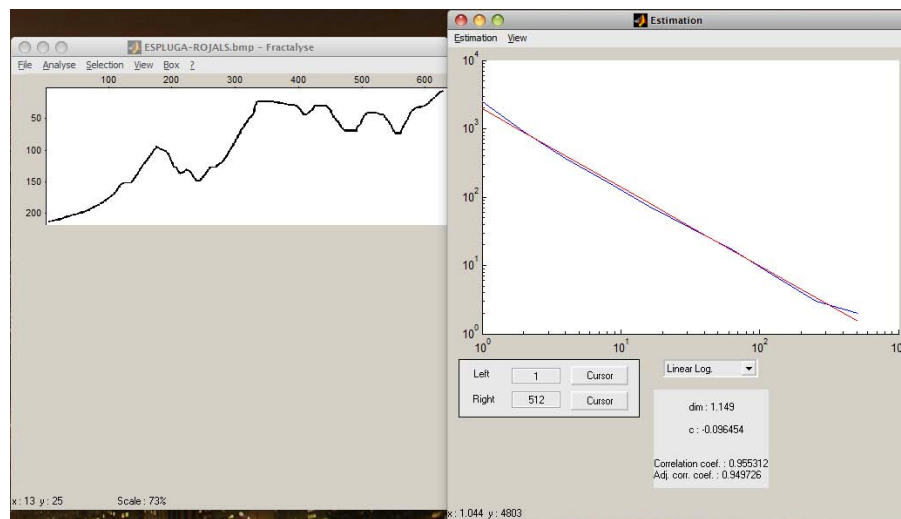
| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 124  | 0,25       | 37,5            | 5.111                    | 880    | 10         | 470                      | 38,810436741 | 23,9624889746                 |
| 125  | 0,15       | 22,5            | 5.133                    | 890    | 10         | 480                      | 24,622144504 | 0                             |
| 126  | 0,9        | 135             | 5.268                    | 890    | 0          | 480                      | 135          | -4,2363947991                 |
| 127  | 0,9        | 135             | 5.403                    | 880    | -10        | 470                      | 135,36986371 | -23,962488975                 |
| 128  | 0,15       | 22,5            | 5.426                    | 870    | -10        | 460                      | 24,622144504 | -18,434948823                 |
| 129  | 0,2        | 30              | 5.456                    | 860    | -10        | 450                      | 31,622776602 | -18,434948823                 |
| 130  | 0,2        | 30              | 5.486                    | 850    | -10        | 440                      | 31,622776602 | -23,962488975                 |
| 131  | 0,15       | 22,5            | 5.508                    | 840    | -10        | 430                      | 24,622144504 | -23,962488975                 |
| 132  | 0,15       | 22,5            | 5.531                    | 830    | -10        | 420                      | 24,622144504 | -33,690067526                 |
| 133  | 0,1        | 15              | 5.546                    | 820    | -10        | 410                      | 18,027756377 | -23,962488975                 |
| 134  | 0,15       | 22,5            | 5.568                    | 810    | -10        | 400                      | 24,622144504 | -23,962488975                 |
| 135  | 0,15       | 22,5            | 5.591                    | 800    | -10        | 390                      | 24,622144504 | 0                             |
| 136  | 0,55       | 82,5            | 5.673                    | 800    | 0          | 390                      | 82,5         | 33,690067526                  |
| 137  | 0,1        | 15              | 5.688                    | 810    | 10         | 400                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 138  | 0,1        | 15              | 5.703                    | 820    | 10         | 410                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 139  | 0,1        | 15              | 5.718                    | 830    | 10         | 420                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 140  | 0,15       | 22,5            | 5.741                    | 840    | 10         | 430                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 141  | 0,15       | 22,5            | 5.763                    | 850    | 10         | 440                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 142  | 0,15       | 22,5            | 5.786                    | 860    | 10         | 450                      | 24,622144504 | 29,0546040991                 |
| 143  | 0,12       | 18              | 5.804                    | 870    | 10         | 460                      | 20,591260282 | 33,690067526                  |
| 144  | 0,1        | 15              | 5.819                    | 880    | 10         | 470                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 145  | 0,1        | 15              | 5.834                    | 890    | 10         | 480                      | 18,027756377 | 18,4349488229                 |
| 146  | 0,2        | 30              | 5.864                    | 900    | 10         | 490                      | 31,622776602 | 10,7842978676                 |
| 147  | 0,35       | 52,5            | 5.916                    | 910    | 10         | 500                      | 53,443895816 | 3,81407483429                 |
| 148  | 1          | 150             | 6.066                    | 920    | 10         | 510                      | 150,33296378 | 12,5288077092                 |
| 149  | 0,3        | 45              | 6.111                    | 930    | 10         | 520                      | 46,097722286 | 12,5288077092                 |
| 150  | 0,3        | 45              | 6.156                    | 940    | 10         | 530                      | 46,097722286 | 14,9314171781                 |
| 151  | 0,25       | 37,5            | 6.194                    | 950    | 10         | 540                      | 38,810436741 | 14,9314171781                 |
| 152  | 0,25       | 37,5            | 6.231                    | 960    | 10         | 550                      | 38,810436741 | 12,5288077092                 |
| 153  | 0,3        | 45              | 6.276                    | 970    | 10         | 560                      | 46,097722286 | 18,4349488229                 |
| 154  | 0,2        | 30              | 6.306                    | 980    | 10         | 570                      | 31,622776602 | 5,44033203101                 |
| 155  | 0,35       | 52,5            | 6.359                    | 985    | 5          | 575                      | 52,737557774 | 0                             |

D'aquesta taula n'obtenim el tall geològic relacionant l' $\Delta x$  acumulat real i l'alçada (metres):

### TALL GEOLÒGIC ENTRE L'ESPLUGA I ROJALS



Al ficar aquesta corba al programa n'obtenim la dimensió fractal, la qual és 1,149



Com podem veure la dimensió fractal entre l'Esplugas i Rojals és de 1,149, per tant, és menor a l'anterior, possiblement és menor perquè com es pot veure al gràfic, el tall geològic no és tan arrugat com l'anterior i no té canvis bruscos, sinó que els turons d'aquestes muntanyes són més arrodonits. Si més no, hem obtingut una dimensió que evidencia que aquestes muntanyes tenen certa forma fractal.

*Dimensió fractal entre l'Esplugas de Francolí i Prades*

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 1    | 0          | 0               | 0                        | 440    | 0          | 0                        | 0            | 0                             |
| 2    | 2,9        | 435             | 435                      | 440    | 0          | 0                        | 435          | 1,52752544221                 |
| 3    | 2,5        | 375             | 810                      | 450    | 10         | 10                       | 375,13330964 | 1,52752544221                 |
| 4    | 2,5        | 375             | 1.185                    | 460    | 10         | 20                       | 375,13330964 | 2,72631099391                 |
| 5    | 1,4        | 210             | 1.395                    | 470    | 10         | 30                       | 210,23796042 | 1,52752544221                 |
| 6    | 2,5        | 375             | 1.770                    | 480    | 10         | 40                       | 375,13330964 | 5,44033203101                 |
| 7    | 0,7        | 105             | 1.875                    | 490    | 10         | 50                       | 105,47511555 | 1,09121622526                 |
| 8    | 3,5        | 525             | 2.400                    | 500    | 10         | 60                       | 525,09522946 | 3,81407483429                 |
| 9    | 1          | 150             | 2.550                    | 510    | 10         | 70                       | 150,33296378 | 4,76364169073                 |
| 10   | 0,8        | 120             | 2.670                    | 520    | 10         | 80                       | 120,41594579 | 5,44033203101                 |
| 11   | 0,7        | 105             | 2.775                    | 530    | 10         | 90                       | 105,47511555 | 3,17983011986                 |
| 12   | 1,2        | 180             | 2.955                    | 540    | 10         | 100                      | 180,27756377 | 0                             |
| 13   | 0,9        | 135             | 3.090                    | 540    | 0          | 100                      | 135          | 5,44033203101                 |
| 14   | 0,7        | 105             | 3.195                    | 550    | 10         | 110                      | 105,47511555 | 14,9314171781                 |
| 15   | 0,25       | 37,5            | 3.233                    | 560    | 10         | 120                      | 38,810436741 | 12,5288077092                 |
| 16   | 0,3        | 45              | 3.278                    | 570    | 10         | 130                      | 46,097722286 | 18,4349488229                 |
| 17   | 0,2        | 30              | 3.308                    | 580    | 10         | 140                      | 31,622776602 | 12,5288077092                 |
| 18   | 0,3        | 45              | 3.353                    | 590    | 10         | 150                      | 46,097722286 | 23,9624889746                 |
| 19   | 0,15       | 22,5            | 3.375                    | 600    | 10         | 160                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 20   | 0,15       | 22,5            | 3.398                    | 610    | 10         | 170                      | 24,622144504 | 0                             |
| 21   | 1,5        | 225             | 3.623                    | 610    | 0          | 170                      | 225          | -23,962488975                 |
| 22   | 0,15       | 22,5            | 3.645                    | 600    | -10        | 160                      | 24,622144504 | -23,962488975                 |
| 23   | 0,15       | 22,5            | 3.668                    | 590    | -10        | 150                      | 24,622144504 | 0                             |
| 24   | 0,4        | 60              | 3.728                    | 590    | 0          | 150                      | 60           | 18,4349488229                 |
| 25   | 0,2        | 30              | 3.758                    | 600    | 10         | 160                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 26   | 0,15       | 22,5            | 3.780                    | 610    | 10         | 170                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 27   | 0,2        | 30              | 3.810                    | 620    | 10         | 180                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 28   | 0,15       | 22,5            | 3.833                    | 630    | 10         | 190                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 29   | 0,15       | 22,5            | 3.855                    | 640    | 10         | 200                      | 24,622144504 | 33,690067526                  |
| 30   | 0,1        | 15              | 3.870                    | 650    | 10         | 210                      | 18,027756377 | 4,76364169073                 |
| 31   | 0,8        | 120             | 3.990                    | 660    | 10         | 220                      | 120,41594579 | -14,931417178                 |
| 32   | 0,25       | 37,5            | 4.028                    | 650    | -10        | 210                      | 38,810436741 | -33,690067526                 |
| 33   | 0,1        | 15              | 4.043                    | 640    | -10        | 200                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 34   | 0,1        | 15              | 4.058                    | 630    | -10        | 190                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 35   | 0,1        | 15              | 4.073                    | 620    | -10        | 180                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 36   | 0,1        | 15              | 4.088                    | 610    | -10        | 170                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 37   | 0,1        | 15              | 4.103                    | 600    | -10        | 160                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 38   | 0,1        | 15              | 4.118                    | 590    | -10        | 150                      | 18,027756377 | -23,962488975                 |
| 39   | 0,15       | 22,5            | 4.140                    | 580    | -10        | 140                      | 24,622144504 | 0                             |

# EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 40   | 0,45       | 67,5            | 4.208                    | 580    | 0          | 140                      | 67,5         | 33,690067526                  |
| 41   | 0,1        | 15              | 4.223                    | 590    | 10         | 150                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 42   | 0,15       | 22,5            | 4.245                    | 600    | 10         | 160                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 43   | 0,15       | 22,5            | 4.268                    | 610    | 10         | 170                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 44   | 0,15       | 22,5            | 4.290                    | 620    | 10         | 180                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 45   | 0,15       | 22,5            | 4.313                    | 630    | 10         | 190                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 46   | 0,15       | 22,5            | 4.335                    | 640    | 10         | 200                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 47   | 0,2        | 30              | 4.365                    | 650    | 10         | 210                      | 31,622776602 | -10,784297868                 |
| 48   | 0,35       | 52,5            | 4.418                    | 640    | -10        | 200                      | 53,443895816 | 6,34019174591                 |
| 49   | 0,6        | 90              | 4.508                    | 650    | 10         | 210                      | 90,553851381 | -18,434948823                 |
| 50   | 0,2        | 30              | 4.538                    | 640    | -10        | 200                      | 31,622776602 | -18,434948823                 |
| 51   | 0,2        | 30              | 4.568                    | 630    | -10        | 190                      | 31,622776602 | -14,931417178                 |
| 52   | 0,25       | 37,5            | 4.605                    | 620    | -10        | 180                      | 38,810436741 | -18,434948823                 |
| 53   | 0,2        | 30              | 4.635                    | 610    | -10        | 170                      | 31,622776602 | -23,962488975                 |
| 54   | 0,15       | 22,5            | 4.658                    | 600    | -10        | 160                      | 24,622144504 | -23,962488975                 |
| 55   | 0,15       | 22,5            | 4.680                    | 590    | -10        | 150                      | 24,622144504 | -29,054604099                 |
| 56   | 0,12       | 18              | 4.698                    | 580    | -10        | 140                      | 20,591260282 | -33,690067526                 |
| 57   | 0,1        | 15              | 4.713                    | 570    | -10        | 130                      | 18,027756377 | -12,528807709                 |
| 58   | 0,3        | 45              | 4.758                    | 560    | -10        | 120                      | 46,097722286 | 0                             |
| 59   | 0,55       | 82,5            | 4.841                    | 560    | 0          | 120                      | 82,5         | 14,9314171781                 |
| 60   | 0,25       | 37,5            | 4.878                    | 570    | 10         | 130                      | 38,810436741 | 23,9624889746                 |
| 61   | 0,15       | 22,5            | 4.901                    | 580    | 10         | 140                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 62   | 0,15       | 22,5            | 4.923                    | 590    | 10         | 150                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 63   | 0,2        | 30              | 4.953                    | 600    | 10         | 160                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 64   | 0,2        | 30              | 4.983                    | 610    | 10         | 170                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 65   | 0,15       | 22,5            | 5.006                    | 620    | 10         | 180                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 66   | 0,2        | 30              | 5.036                    | 630    | 10         | 190                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 67   | 0,15       | 22,5            | 5.058                    | 640    | 10         | 200                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 68   | 0,2        | 30              | 5.088                    | 650    | 10         | 210                      | 31,622776602 | 14,9314171781                 |
| 69   | 0,25       | 37,5            | 5.126                    | 660    | 10         | 220                      | 38,810436741 | 14,9314171781                 |
| 70   | 0,25       | 37,5            | 5.163                    | 670    | 10         | 230                      | 38,810436741 | 14,9314171781                 |
| 71   | 0,25       | 37,5            | 5.201                    | 680    | 10         | 240                      | 38,810436741 | 18,4349488229                 |
| 72   | 0,2        | 30              | 5.231                    | 690    | 10         | 250                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 73   | 0,2        | 30              | 5.261                    | 700    | 10         | 260                      | 31,622776602 | 23,9624889746                 |
| 74   | 0,15       | 22,5            | 5.283                    | 710    | 10         | 270                      | 24,622144504 | 12,5288077092                 |
| 75   | 0,3        | 45              | 5.328                    | 720    | 10         | 280                      | 46,097722286 | 18,4349488229                 |
| 76   | 0,2        | 30              | 5.358                    | 730    | 10         | 290                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 77   | 0,2        | 30              | 5.388                    | 740    | 10         | 300                      | 31,622776602 | 12,5288077092                 |
| 78   | 0,3        | 45              | 5.433                    | 750    | 10         | 310                      | 46,097722286 | 12,5288077092                 |
| 79   | 0,3        | 45              | 5.478                    | 760    | 10         | 320                      | 46,097722286 | 18,4349488229                 |
| 80   | 0,2        | 30              | 5.508                    | 770    | 10         | 330                      | 31,622776602 | 14,9314171781                 |
| 81   | 0,25       | 37,5            | 5.546                    | 780    | 10         | 340                      | 38,810436741 | 0                             |
| 82   | 0,4        | 60              | 5.606                    | 780    | 0          | 340                      | 60           | -18,434948823                 |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 83   | 0,2        | 30              | 5.636                    | 770    | -10        | 330                      | 31,622776602 | -7,5946433686                 |
| 84   | 0,5        | 75              | 5.711                    | 760    | -10        | 320                      | 75,663729752 | 0                             |
| 85   | 0,5        | 75              | 5.786                    | 760    | 0          | 320                      | 75           | 14,9314171781                 |
| 86   | 0,25       | 37,5            | 5.823                    | 770    | 10         | 330                      | 38,810436741 | 33,690067526                  |
| 87   | 0,1        | 15              | 5.838                    | 780    | 10         | 340                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 88   | 0,1        | 15              | 5.853                    | 790    | 10         | 350                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 89   | 0,1        | 15              | 5.868                    | 800    | 10         | 360                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 90   | 0,15       | 22,5            | 5.891                    | 810    | 10         | 370                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 91   | 0,15       | 22,5            | 5.913                    | 820    | 10         | 380                      | 24,622144504 | 33,690067526                  |
| 92   | 0,1        | 15              | 5.928                    | 830    | 10         | 390                      | 18,027756377 | 0                             |
| 93   | 0,5        | 75              | 6.003                    | 830    | 0          | 390                      | 75           | -33,690067526                 |
| 94   | 0,1        | 15              | 6.018                    | 820    | -10        | 380                      | 18,027756377 | -23,962488975                 |
| 95   | 0,15       | 22,5            | 6.041                    | 810    | -10        | 370                      | 24,622144504 | -33,690067526                 |
| 96   | 0,1        | 15              | 6.056                    | 800    | -10        | 360                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 97   | 0,1        | 15              | 6.071                    | 790    | -10        | 350                      | 18,027756377 | -23,962488975                 |
| 98   | 0,15       | 22,5            | 6.093                    | 780    | -10        | 340                      | 24,622144504 | -23,962488975                 |
| 99   | 0,15       | 22,5            | 6.116                    | 770    | -10        | 330                      | 24,622144504 | -6,3401917459                 |
| 100  | 0,6        | 90              | 6.206                    | 760    | -10        | 320                      | 90,553851381 | 10,7842978676                 |
| 101  | 0,35       | 52,5            | 6.258                    | 770    | 10         | 330                      | 53,443895816 | 0                             |
| 102  | 0,5        | 75              | 6.333                    | 770    | 0          | 330                      | 75           | 14,9314171781                 |
| 103  | 0,25       | 37,5            | 6.371                    | 780    | 10         | 340                      | 38,810436741 | 14,9314171781                 |
| 104  | 0,25       | 37,5            | 6.408                    | 790    | 10         | 350                      | 38,810436741 | 0                             |
| 105  | 0,3        | 45              | 6.453                    | 790    | 0          | 350                      | 45           | -18,434948823                 |
| 106  | 0,2        | 30              | 6.483                    | 780    | -10        | 340                      | 31,622776602 | -23,962488975                 |
| 107  | 0,15       | 22,5            | 6.506                    | 770    | -10        | 330                      | 24,622144504 | -12,528807709                 |
| 108  | 0,3        | 45              | 6.551                    | 760    | -10        | 320                      | 46,097722286 | -18,434948823                 |
| 109  | 0,2        | 30              | 6.581                    | 750    | -10        | 310                      | 31,622776602 | -23,962488975                 |
| 110  | 0,15       | 22,5            | 6.603                    | 740    | -10        | 300                      | 24,622144504 | -33,690067526                 |
| 111  | 0,1        | 15              | 6.618                    | 730    | -10        | 290                      | 18,027756377 | -23,962488975                 |
| 112  | 0,15       | 22,5            | 6.641                    | 720    | -10        | 280                      | 24,622144504 | -23,962488975                 |
| 113  | 0,15       | 22,5            | 6.663                    | 710    | -10        | 270                      | 24,622144504 | -33,690067526                 |
| 114  | 0,1        | 15              | 6.678                    | 700    | -10        | 260                      | 18,027756377 | 0                             |
| 115  | 0,25       | 37,5            | 6.716                    | 700    | 0          | 260                      | 37,5         | 18,4349488229                 |
| 116  | 0,2        | 30              | 6.746                    | 710    | 10         | 270                      | 31,622776602 | 0                             |
| 117  | 0,7        | 105             | 6.851                    | 710    | 0          | 270                      | 105          | -23,962488975                 |
| 118  | 0,15       | 22,5            | 6.873                    | 700    | -10        | 260                      | 24,622144504 | -33,690067526                 |
| 119  | 0,1        | 15              | 6.888                    | 690    | -10        | 250                      | 18,027756377 | -18,434948823                 |
| 120  | 0,2        | 30              | 6.918                    | 680    | -10        | 240                      | 31,622776602 | -33,690067526                 |
| 121  | 0,1        | 15              | 6.933                    | 670    | -10        | 230                      | 18,027756377 | -23,962488975                 |
| 122  | 0,15       | 22,5            | 6.956                    | 660    | -10        | 220                      | 24,622144504 | -23,962488975                 |
| 123  | 0,15       | 22,5            | 6.978                    | 650    | -10        | 210                      | 24,622144504 | -12,528807709                 |
| 124  | 0,3        | 45              | 7.023                    | 640    | -10        | 200                      | 46,097722286 | 0                             |
| 125  | 0,5        | 75              | 7.098                    | 640    | 0          | 200                      | 75           | 9,46232220803                 |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 126  | 0,4        | 60              | 7.158                    | 650    | 10         | 210                      | 60,827625303 | 6,91122711902                 |
| 127  | 0,55       | 82,5            | 7.241                    | 660    | 10         | 220                      | 83,103850693 | 23,9624889746                 |
| 128  | 0,15       | 22,5            | 7.263                    | 670    | 10         | 230                      | 24,622144504 | 33,690067526                  |
| 129  | 0,1        | 15              | 7.278                    | 680    | 10         | 240                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 130  | 0,15       | 22,5            | 7.301                    | 690    | 10         | 250                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 131  | 0,15       | 22,5            | 7.323                    | 700    | 10         | 260                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 132  | 0,2        | 30              | 7.353                    | 710    | 10         | 270                      | 31,622776602 | 12,5288077092                 |
| 133  | 0,3        | 45              | 7.398                    | 720    | 10         | 280                      | 46,097722286 | 12,5288077092                 |
| 134  | 0,3        | 45              | 7.443                    | 730    | 10         | 290                      | 46,097722286 | 14,9314171781                 |
| 135  | 0,25       | 37,5            | 7.481                    | 740    | 10         | 300                      | 38,810436741 | 10,7842978676                 |
| 136  | 0,35       | 52,5            | 7.533                    | 750    | 10         | 310                      | 53,443895816 | 18,4349488229                 |
| 137  | 0,2        | 30              | 7.563                    | 760    | 10         | 320                      | 31,622776602 | 33,690067526                  |
| 138  | 0,1        | 15              | 7.578                    | 770    | 10         | 330                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 139  | 0,15       | 22,5            | 7.601                    | 780    | 10         | 340                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |
| 140  | 0,2        | 30              | 7.631                    | 790    | 10         | 350                      | 31,622776602 | 14,9314171781                 |
| 141  | 0,25       | 37,5            | 7.668                    | 800    | 10         | 360                      | 38,810436741 | 14,9314171781                 |
| 142  | 0,25       | 37,5            | 7.706                    | 810    | 10         | 370                      | 38,810436741 | 12,5288077092                 |
| 143  | 0,3        | 45              | 7.751                    | 820    | 10         | 380                      | 46,097722286 | 4,76364169073                 |
| 144  | 0,8        | 120             | 7.871                    | 830    | 10         | 390                      | 120,41594579 | 18,4349488229                 |
| 145  | 0,2        | 30              | 7.901                    | 840    | 10         | 400                      | 31,622776602 | 33,690067526                  |
| 146  | 0,1        | 15              | 7.916                    | 850    | 10         | 410                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 147  | 0,15       | 22,5            | 7.938                    | 860    | 10         | 420                      | 24,622144504 | 33,690067526                  |
| 148  | 0,1        | 15              | 7.953                    | 870    | 10         | 430                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 149  | 0,1        | 15              | 7.968                    | 880    | 10         | 440                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 150  | 0,1        | 15              | 7.983                    | 890    | 10         | 450                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 151  | 0,1        | 15              | 7.998                    | 900    | 10         | 460                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 152  | 0,1        | 15              | 8.013                    | 910    | 10         | 470                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 153  | 0,1        | 15              | 8.028                    | 920    | 10         | 480                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 154  | 0,1        | 15              | 8.043                    | 930    | 10         | 490                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 155  | 0,1        | 15              | 8.058                    | 940    | 10         | 500                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 156  | 0,15       | 22,5            | 8.081                    | 950    | 10         | 510                      | 24,622144504 | 7,59464336859                 |
| 157  | 0,5        | 75              | 8.156                    | 960    | 10         | 520                      | 75,663729752 | 12,5288077092                 |
| 158  | 0,3        | 45              | 8.201                    | 970    | 10         | 530                      | 46,097722286 | 12,5288077092                 |
| 159  | 0,3        | 45              | 8.246                    | 980    | 10         | 540                      | 46,097722286 | 0                             |
| 160  | 0,4        | 60              | 8.306                    | 980    | 0          | 540                      | 60           | -18,434948823                 |
| 161  | 0,2        | 30              | 8.336                    | 970    | -10        | 530                      | 31,622776602 | 0                             |
| 162  | 0,65       | 97,5            | 8.433                    | 970    | 0          | 530                      | 97,5         | 18,4349488229                 |
| 163  | 0,2        | 30              | 8.463                    | 980    | 10         | 540                      | 31,622776602 | 0                             |
| 164  | 0,55       | 82,5            | 8.546                    | 980    | 0          | 540                      | 82,5         | -12,528807709                 |
| 165  | 0,3        | 45              | 8.591                    | 970    | -10        | 530                      | 46,097722286 | 12,5288077092                 |
| 166  | 0,3        | 45              | 8.636                    | 980    | 10         | 540                      | 46,097722286 | 33,690067526                  |
| 167  | 0,1        | 15              | 8.651                    | 990    | 10         | 550                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 168  | 0,15       | 22,5            | 8.673                    | 1000   | 10         | 560                      | 24,622144504 | 18,4349488229                 |

EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 169  | 0,2        | 30              | 8.703                    | 1010   | 10         | 570                      | 31,622776602 | 14,9314171781                 |
| 170  | 0,25       | 37,5            | 8.741                    | 1020   | 10         | 580                      | 38,810436741 | 18,4349488229                 |
| 171  | 0,2        | 30              | 8.771                    | 1030   | 10         | 590                      | 31,622776602 | 12,5288077092                 |
| 172  | 0,3        | 45              | 8.816                    | 1040   | 10         | 600                      | 46,097722286 | 18,4349488229                 |
| 173  | 0,2        | 30              | 8.846                    | 1050   | 10         | 610                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 174  | 0,2        | 30              | 8.876                    | 1060   | 10         | 620                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 175  | 0,2        | 30              | 8.906                    | 1070   | 10         | 630                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 176  | 0,2        | 30              | 8.936                    | 1080   | 10         | 640                      | 31,622776602 | 0                             |
| 177  | 1,1        | 165             | 9.101                    | 1080   | 0          | 640                      | 165          | -12,528807709                 |
| 178  | 0,3        | 45              | 9.146                    | 1070   | -10        | 630                      | 46,097722286 | -33,690067526                 |
| 179  | 0,1        | 15              | 9.161                    | 1060   | -10        | 620                      | 18,027756377 | -23,962488975                 |
| 180  | 0,15       | 22,5            | 9.183                    | 1050   | -10        | 610                      | 24,622144504 | -14,931417178                 |
| 181  | 0,25       | 37,5            | 9.221                    | 1040   | -10        | 600                      | 38,810436741 | -14,931417178                 |
| 182  | 0,25       | 37,5            | 9.258                    | 1030   | -10        | 590                      | 38,810436741 | 18,4349488229                 |
| 183  | 0,2        | 30              | 9.288                    | 1040   | 10         | 600                      | 31,622776602 | 33,690067526                  |
| 184  | 0,1        | 15              | 9.303                    | 1050   | 10         | 610                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 185  | 0,1        | 15              | 9.318                    | 1060   | 10         | 620                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 186  | 0,15       | 22,5            | 9.341                    | 1070   | 10         | 630                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 187  | 0,15       | 22,5            | 9.363                    | 1080   | 10         | 640                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 188  | 0,15       | 22,5            | 9.386                    | 1090   | 10         | 650                      | 24,622144504 | 29,0546040991                 |
| 189  | 0,12       | 18              | 9.404                    | 1100   | 10         | 660                      | 20,591260282 | 29,0546040991                 |
| 190  | 0,12       | 18              | 9.422                    | 1110   | 10         | 670                      | 20,591260282 | -29,054604099                 |
| 191  | 0,12       | 18              | 9.440                    | 1100   | -10        | 660                      | 20,591260282 | -33,690067526                 |
| 192  | 0,1        | 15              | 9.455                    | 1090   | -10        | 650                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 193  | 0,1        | 15              | 9.470                    | 1080   | -10        | 640                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 194  | 0,1        | 15              | 9.485                    | 1070   | -10        | 630                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 195  | 0,1        | 15              | 9.500                    | 1060   | -10        | 620                      | 18,027756377 | -33,690067526                 |
| 196  | 0,1        | 15              | 9.515                    | 1050   | -10        | 610                      | 18,027756377 | -23,962488975                 |
| 197  | 0,15       | 22,5            | 9.537                    | 1040   | -10        | 600                      | 24,622144504 | -33,690067526                 |
| 198  | 0,1        | 15              | 9.552                    | 1030   | -10        | 590                      | 18,027756377 | -18,434948823                 |
| 199  | 0,2        | 30              | 9.582                    | 1020   | -10        | 580                      | 31,622776602 | -18,434948823                 |
| 200  | 0,2        | 30              | 9.612                    | 1010   | -10        | 570                      | 31,622776602 | -18,434948823                 |
| 201  | 0,2        | 30              | 9.642                    | 1000   | -10        | 560                      | 31,622776602 | 33,690067526                  |
| 202  | 0,1        | 15              | 9.657                    | 1010   | 10         | 570                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 203  | 0,1        | 15              | 9.672                    | 1020   | 10         | 580                      | 18,027756377 | 20,3231368297                 |
| 204  | 0,18       | 27              | 9.699                    | 1030   | 10         | 590                      | 28,792360098 | 33,690067526                  |
| 205  | 0,1        | 15              | 9.714                    | 1040   | 10         | 600                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 206  | 0,15       | 22,5            | 9.737                    | 1050   | 10         | 610                      | 24,622144504 | 33,690067526                  |
| 207  | 0,1        | 15              | 9.752                    | 1060   | 10         | 620                      | 18,027756377 | 33,690067526                  |
| 208  | 0,1        | 15              | 9.767                    | 1070   | 10         | 630                      | 18,027756377 | 23,9624889746                 |
| 209  | 0,15       | 22,5            | 9.789                    | 1080   | 10         | 640                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 210  | 0,15       | 22,5            | 9.812                    | 1090   | 10         | 650                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |
| 211  | 0,15       | 22,5            | 9.834                    | 1100   | 10         | 660                      | 24,622144504 | 23,9624889746                 |

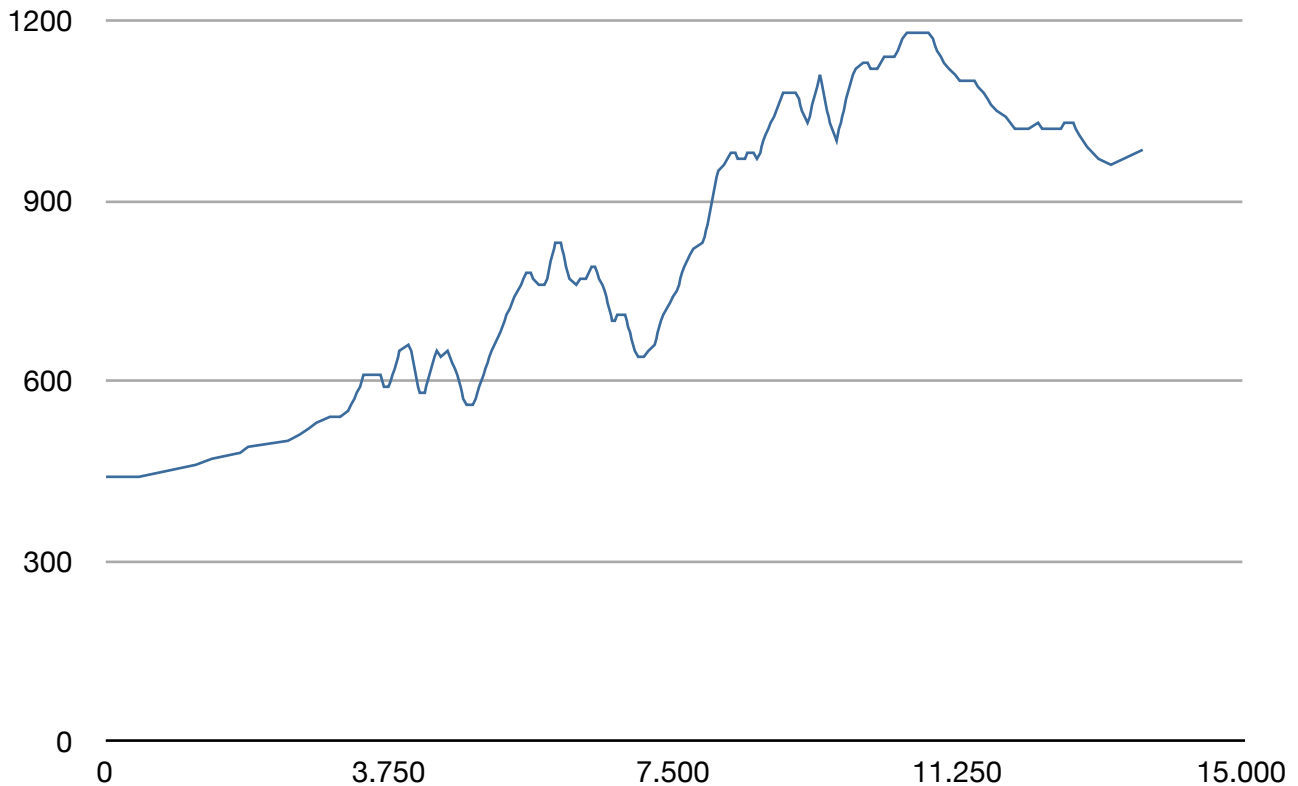
EL LLENGUATGE MATEMÀTIC DE LA NATURA

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 212  | 0,15       | 22,5            | 9.857                    | 1110   | 10         | 670                      | 24,622144504 | 14,9314171781                 |
| 213  | 0,25       | 37,5            | 9.894                    | 1120   | 10         | 680                      | 38,810436741 | 5,85601358543                 |
| 214  | 0,65       | 97,5            | 9.992                    | 1130   | 10         | 690                      | 98,01147892  | 0                             |
| 215  | 0,4        | 60              | 10.052                   | 1130   | 0          | 690                      | 60           | -14,931417178                 |
| 216  | 0,25       | 37,5            | 10.089                   | 1120   | -10        | 680                      | 38,810436741 | 0                             |
| 217  | 0,6        | 90              | 10.179                   | 1120   | 0          | 680                      | 90           | 12,5288077092                 |
| 218  | 0,3        | 45              | 10.224                   | 1130   | 10         | 690                      | 46,097722286 | 12,5288077092                 |
| 219  | 0,3        | 45              | 10.269                   | 1140   | 10         | 700                      | 46,097722286 | 0                             |
| 220  | 0,9        | 135             | 10.404                   | 1140   | 0          | 700                      | 135          | 12,5288077092                 |
| 221  | 0,3        | 45              | 10.449                   | 1150   | 10         | 710                      | 46,097722286 | 18,4349488229                 |
| 222  | 0,2        | 30              | 10.479                   | 1160   | 10         | 720                      | 31,622776602 | 18,4349488229                 |
| 223  | 0,2        | 30              | 10.509                   | 1170   | 10         | 730                      | 31,622776602 | 9,46232220803                 |
| 224  | 0,4        | 60              | 10.569                   | 1180   | 10         | 740                      | 60,827625303 | 0                             |
| 225  | 1,9        | 285             | 10.854                   | 1180   | 0          | 740                      | 285          | -9,462322208                  |
| 226  | 0,4        | 60              | 10.914                   | 1170   | -10        | 730                      | 60,827625303 | -23,962488975                 |
| 227  | 0,15       | 22,5            | 10.937                   | 1160   | -10        | 720                      | 24,622144504 | -18,434948823                 |
| 228  | 0,2        | 30              | 10.967                   | 1150   | -10        | 710                      | 31,622776602 | -10,784297868                 |
| 229  | 0,35       | 52,5            | 11.019                   | 1140   | -10        | 700                      | 53,443895816 | -14,931417178                 |
| 230  | 0,25       | 37,5            | 11.057                   | 1130   | -10        | 690                      | 38,810436741 | -8,4269690215                 |
| 231  | 0,45       | 67,5            | 11.124                   | 1120   | -10        | 680                      | 68,23672032  | -6,911227119                  |
| 232  | 0,55       | 82,5            | 11.207                   | 1110   | -10        | 670                      | 83,103850693 | -9,462322208                  |
| 233  | 0,4        | 60              | 11.267                   | 1100   | -10        | 660                      | 60,827625303 | 0                             |
| 234  | 1,3        | 195             | 11.462                   | 1100   | 0          | 660                      | 195          | -12,528807709                 |
| 235  | 0,3        | 45              | 11.507                   | 1090   | -10        | 650                      | 46,097722286 | -7,5946433686                 |
| 236  | 0,5        | 75              | 11.582                   | 1080   | -10        | 640                      | 75,663729752 | -10,784297868                 |
| 237  | 0,35       | 52,5            | 11.634                   | 1070   | -10        | 630                      | 53,443895816 | -12,528807709                 |
| 238  | 0,3        | 45              | 11.679                   | 1060   | -10        | 620                      | 46,097722286 | -7,5946433686                 |
| 239  | 0,5        | 75              | 11.754                   | 1050   | -10        | 610                      | 75,663729752 | -4,7636416907                 |
| 240  | 0,8        | 120             | 11.874                   | 1040   | -10        | 600                      | 120,41594579 | -9,462322208                  |
| 241  | 0,4        | 60              | 11.934                   | 1030   | -10        | 590                      | 60,827625303 | -9,462322208                  |
| 242  | 0,4        | 60              | 11.994                   | 1020   | -10        | 580                      | 60,827625303 | 0                             |
| 243  | 1,2        | 180             | 12.174                   | 1020   | 0          | 580                      | 180          | 4,48460600954                 |
| 244  | 0,85       | 127,5           | 12.302                   | 1030   | 10         | 590                      | 127,89155562 | -10,784297868                 |
| 245  | 0,35       | 52,5            | 12.354                   | 1020   | -10        | 580                      | 53,443895816 | 0                             |
| 246  | 1,65       | 247,5           | 12.602                   | 1020   | 0          | 580                      | 247,5        | 12,5288077092                 |
| 247  | 0,3        | 45              | 12.647                   | 1030   | 10         | 590                      | 46,097722286 | 0                             |
| 248  | 0,8        | 120             | 12.767                   | 1030   | 0          | 590                      | 120          | -18,434948823                 |
| 249  | 0,2        | 30              | 12.797                   | 1020   | -10        | 580                      | 31,622776602 | -12,528807709                 |
| 250  | 0,3        | 45              | 12.842                   | 1010   | -10        | 570                      | 46,097722286 | -10,784297868                 |
| 251  | 0,35       | 52,5            | 12.894                   | 1000   | -10        | 560                      | 53,443895816 | -10,784297868                 |
| 252  | 0,35       | 52,5            | 12.947                   | 990    | -10        | 550                      | 53,443895816 | -7,5946433686                 |
| 253  | 0,5        | 75              | 13.022                   | 980    | -10        | 540                      | 75,663729752 | -7,5946433686                 |
| 254  | 0,5        | 75              | 13.097                   | 970    | -10        | 530                      | 75,663729752 | -3,4682292589                 |

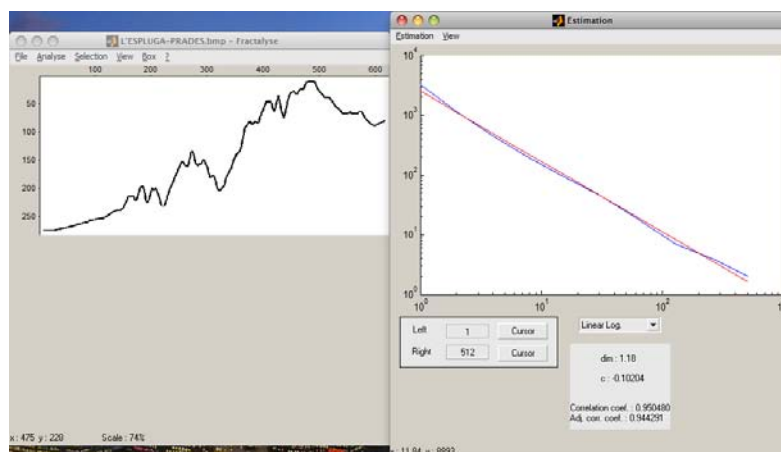
| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 255  | 1,1        | 165             | 13.262                   | 960    | -10        | 520                      | 165,30275255 | 3,40644375499                 |
| 256  | 2,8        | 420             | 13.682                   | 985    | 25         | 545                      | 420,74338973 | 0                             |

D'aquesta taula n'obtenim el tall geològic relacionant l' $\Delta x$  acumulat real i l'alçada (metres):

TALL GEOLÒGIC ENTRE L'ESPLUGA I PRADES



I al introduir el contorn al programa s'obté una dimensió fractal de 1,18

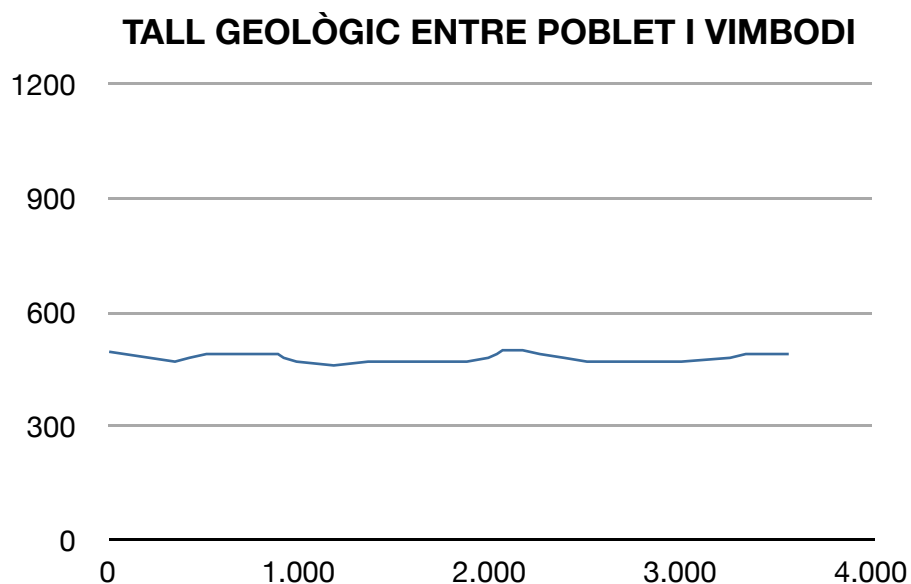


Aquest tall geològic és molt similar a l'anterior i també ho és la dimensió fractal, si més no en aquest podem distingir-hi més irregularitats que en l'anterior per això es lleugerament major la dimensió. També queda comprovat que té característiques de fractal.

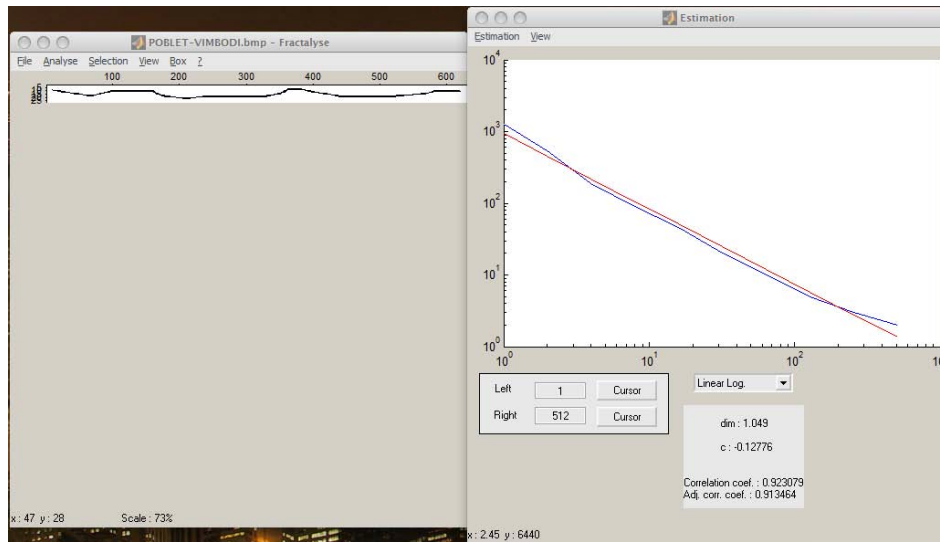
*Dimensió fractal entre Poblet i Vimbodí*

| PUNT | $\Delta x$ | $\Delta x$ REAL | $\Delta x$ ACUMULAT REAL | ALTURA | $\Delta y$ | $\Delta y$ ACUMULAT REAL | DISTÀNCIA    | ANGLE DE PENDENT ( $\alpha$ ) |
|------|------------|-----------------|--------------------------|--------|------------|--------------------------|--------------|-------------------------------|
| 1    | 0          | 0               | 0                        | 496    | 0          | 0                        | 0            | -4,3097959924                 |
| 2    | 2,3        | 345             | 345                      | 470    | -26        | -26                      | 345,97832302 | 7,59464336859                 |
| 3    | 0,5        | 75              | 420                      | 480    | 10         | -16                      | 75,663729752 | 6,34019174591                 |
| 4    | 0,6        | 90              | 510                      | 490    | 10         | -6                       | 90,553851381 | 0                             |
| 5    | 2,5        | 375             | 885                      | 490    | 0          | -6                       | 375          | -18,434948823                 |
| 6    | 0,2        | 30              | 915                      | 480    | -10        | -16                      | 31,622776602 | -8,4269690215                 |
| 7    | 0,45       | 67,5            | 983                      | 470    | -10        | -26                      | 68,23672032  | -2,9356734464                 |
| 8    | 1,3        | 195             | 1.178                    | 460    | -10        | -36                      | 195,2562419  | 3,17983011986                 |
| 9    | 1,2        | 180             | 1.358                    | 470    | 10         | -26                      | 180,27756377 | 0                             |
| 10   | 0,45       | 67,5            | 1.425                    | 470    | 0          | -26                      | 67,5         | 0                             |
| 11   | 3          | 450             | 1.875                    | 470    | 0          | -26                      | 450          | 5,07960786001                 |
| 12   | 0,75       | 112,5           | 1.988                    | 480    | 10         | -16                      | 112,94356998 | 12,5288077092                 |
| 13   | 0,3        | 45              | 2.033                    | 490    | 10         | -6                       | 46,097722286 | 18,4349488229                 |
| 14   | 0,2        | 30              | 2.063                    | 500    | 10         | 4                        | 31,622776602 | 0                             |
| 15   | 0,7        | 105             | 2.168                    | 500    | 0          | 4                        | 105          | -6,3401917459                 |
| 16   | 0,6        | 90              | 2.258                    | 490    | -10        | -6                       | 90,553851381 | -4,4846060095                 |
| 17   | 0,85       | 127,5           | 2.385                    | 480    | -10        | -16                      | 127,89155562 | -4,7636416907                 |
| 18   | 0,8        | 120             | 2.505                    | 470    | -10        | -26                      | 120,41594579 | 0                             |
| 19   | 3,3        | 495             | 3.000                    | 470    | 0          | -26                      | 495          | 2,2457425659                  |
| 20   | 1,7        | 255             | 3.255                    | 480    | 10         | -16                      | 255,1960031  | 6,91122711902                 |
| 21   | 0,55       | 82,5            | 3.338                    | 490    | 10         | -6                       | 83,103850693 | 0                             |
| 22   | 1,5        | 225             | 3.563                    | 490    | 0          | -6                       | 225          | -72,979474388                 |
| 23   | 1          | 150             | 3.713                    |        | -490       | -496                     | 512,44511901 | 0                             |

D'aquesta taula n'obtenim el tall geològic relacionant l' $\Delta x$  acumulat real i l'alçada (metres):



Si introduïm el tall geològic al programa, aquest ens diu que la dimensió fractal és 1,049



Aquest tall geològic el vaig fer expressament per demostrar que no tota la Conca tenia una dimensió fractal gran, entre Poblet i Vimbodí només hi ha prats que no formen cap muntanya, per tant, el tall geològic serà més llis, i no pas arrugat com els anteriors, així doncs, podem dir que la falda de la muntanya de Poblet no és massa fractal, però tot i això, té alguna mica de fractal perquè sinó la dimensió seria 1, però en el cas de dimensió 1 els parts serien totalment plans, fet que és impossible a la pràctica.

Com ja hem vist en l'estudi, la dimensió fractal d'algunes muntanyes de la Conca és força gran i s'acosta a la dimensió d'alguns fractals coneguts, més endavant a les conclusions de l'apartat de les fractals exposaré amb total extensió les conclusions de l'estudi.

#### 4.5 Estudi de la dimensió fractal dels contorns dels pobles de la Conca de Barberà

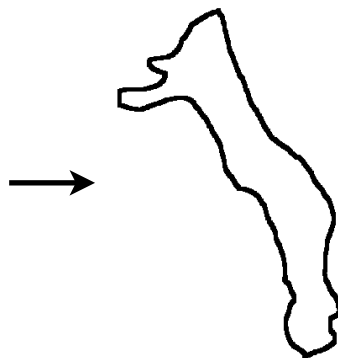
A continuació hi ha tots els pobles amb el corresponent anàlisi de la seva dimensió fractal i més avall hi ha una taula amb informació i l'anàlisi d'aquesta.

##### Barberà de la Conca



Dimensió Fractal  
1,489

##### Belltal



Dimensió Fractal  
1,332

##### Blancafort



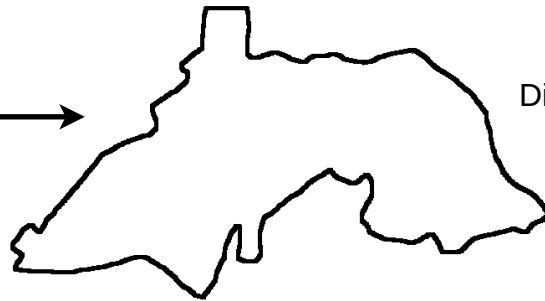
Dimensió Fractal  
1,363

**Conesa**



Dimensió Fractal  
1,486

**l'Espluga de Francolí**



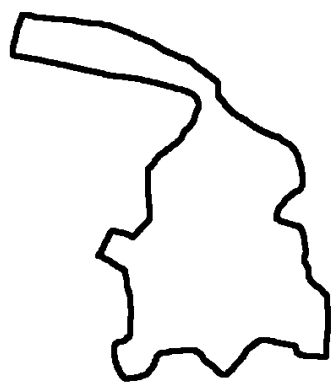
Dimensió Fractal  
1,342

**Forès**



Dimensió Fractal  
1,443

**Llorac**



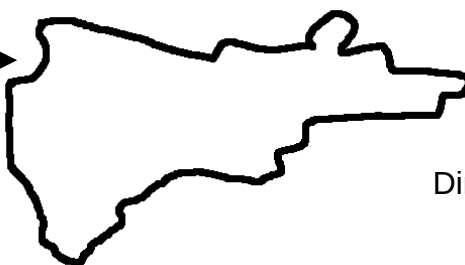
Dimensió Fractal  
1,419

**Montblanc**



Dimensió Fractal  
1,367

**Passanant**



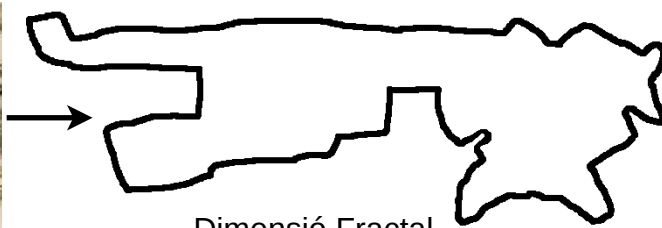
Dimensió Fractal  
1,415

**Les Piles**



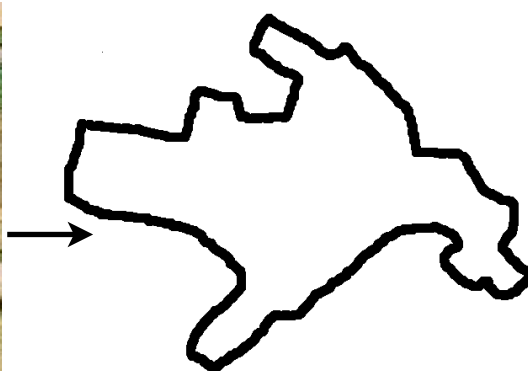
Dimensió Fractal  
1,428

**Pira**



Dimensió Fractal  
1,469

**Pontils**



Dimensió Fractal  
1,459

**Rocafort de Queralt**



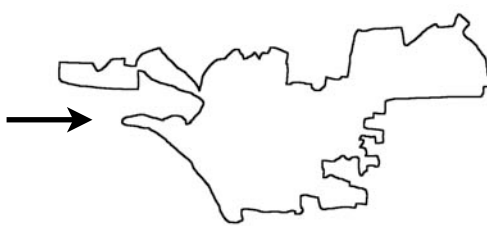
Dimensió Fractal  
1,386

**Santa Coloma de Queralt**



Dimensió Fractal  
1,326

**Sarrai**



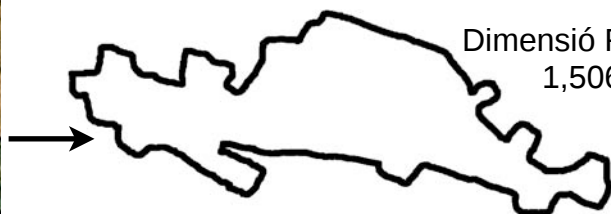
Dimensió Fractal  
1,340

**Savallà del Comptat**



Dimensió Fractal  
1,394

**Senan**



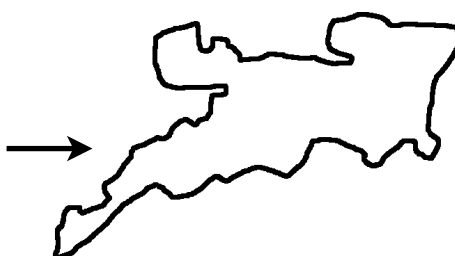
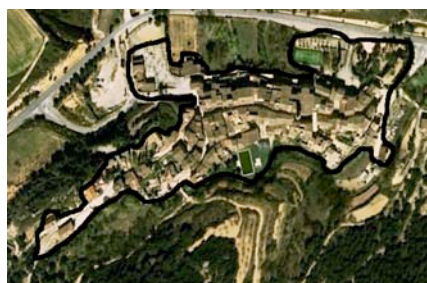
Dimensió Fractal  
1,506

**Solivella**



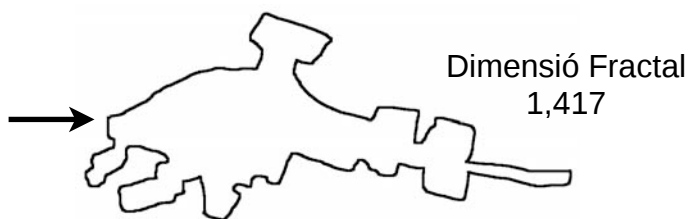
Dimensió Fractal  
1,345

**Vallclara**



Dimensió Fractal  
1,417

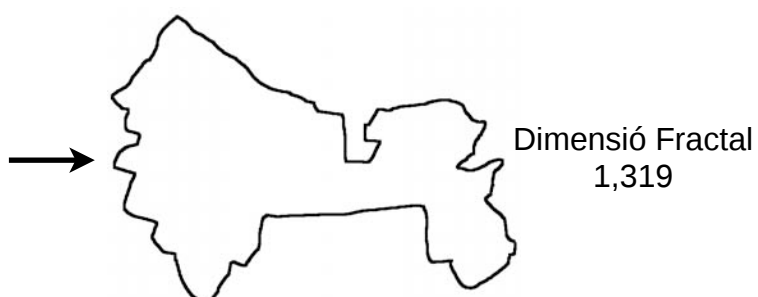
**Vallfogona de Riucorb**



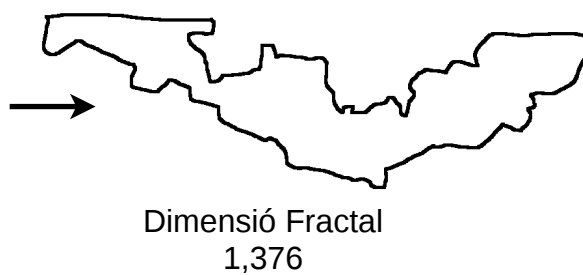
**Vilanova de Prades**



**Vilaverd**



**Vimbodí**



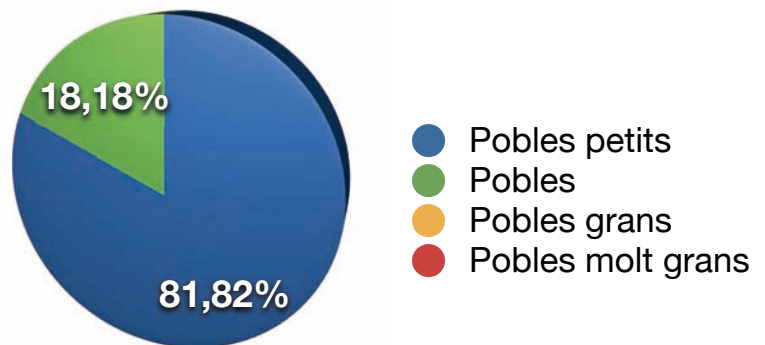
| Poble                   | Població | Dimensió fractal del contorn | Tipus           |
|-------------------------|----------|------------------------------|-----------------|
| Barberà de la conca     | 503      | 1,489                        | Poble           |
| Belltall                | 90       | 1,332                        | Poble petit     |
| Blancafort              | 414      | 1,363                        | Poble           |
| Conesa                  | 141      | 1,486                        | Poble petit     |
| l'Espluga de Francoli   | 3.857    | 1,342                        | Poble molt gran |
| Forès                   | 57       | 1,443                        | Poble petit     |
| Llorac                  | 116      | 1,419                        | Poble petit     |
| Montblanc               | 6.767    | 1,367                        | Poble molt gran |
| Passanant               | 101      | 1,415                        | Poble petit     |
| Les Piles               | 196      | 1,428                        | Poble petit     |
| Pira                    | 475      | 1,469                        | Poble           |
| Pontils                 | 139      | 1,459                        | Poble petit     |
| Rocafort de Queralt     | 264      | 1,386                        | Poble           |
| Santa coloma de Queralt | 3.035    | 1,326                        | Poble molt gran |
| Sarral                  | 1.720    | 1,341                        | Poble molt gran |
| Savallà del Comptat     | 72       | 1,394                        | Poble petit     |
| Senan                   | 46       | 1,506                        | Poble petit     |
| Solivella               | 630      | 1,345                        | Poble gran      |
| Vallclara               | 108      | 1,417                        | Poble petit     |
| Vallfogona de Riucorb   | 157      | 1,402                        | Poble petit     |
| Vilanova de Prades      | 149      | 1,323                        | Poble petit     |
| Vilaverd                | 438      | 1,319                        | Poble           |
| Vimbodí                 | 1.052    | 1,376                        | Poble gran      |

| Població    | Tipus poble     |
|-------------|-----------------|
| 0-200       | poble petit     |
| 200-600     | poble           |
| 600-1500    | poble gran      |
| més de 1500 | poble molt gran |

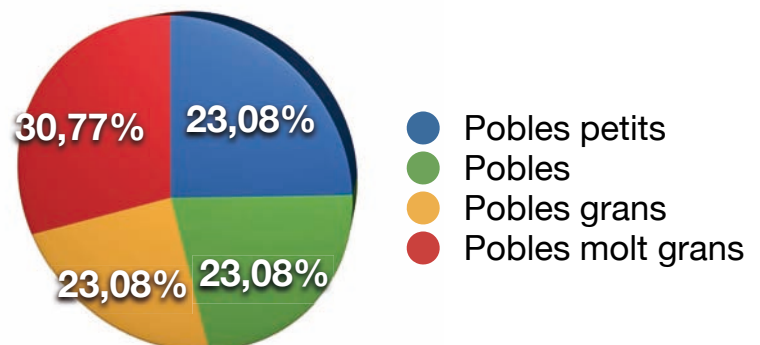
| D   | Classificació  |
|-----|----------------|
| I   | 1.Senan        |
| M   | 2.Barberà      |
|     | 3.Conesa       |
| F   | 4.Pira         |
| R.  | 5.Pontils      |
|     | 6.Forès        |
| S   | 7.Les Piles    |
| U   | 8.Llorac       |
| P.  | 9.Vallclara    |
|     | 10.Passanant   |
| 1,4 | 11.Vallfogona  |
| D   | 12.Savallà     |
| I   | 13.Rocafort    |
| M.  | 14.Vimbodí     |
|     | 15.Montblanc   |
| F   | 16.Blancafort  |
| R.  | 17.Solivella   |
|     | 18.l'Espluga   |
| I   | 19.Sarral      |
| N   | 20.Belltall    |
| F   | 21.Sta. Coloma |
|     | 22.Vilanova    |
| 1,4 | 23.Vilaverd    |

Com podem veure a la taula de la classificació, els pobles més petits tendeixen a tenir una dimensió fractal més gran que els pobles més grans. Això passa perquè en els pobles petits hi ha menys cases al contorn i per tant és més irregular, en canvi, als pobles grans tenen més cases en el contorn i per tant queda més llis. Un altre aspecte que cal remarcar és que el poble amb la dimensió fractal més petita és Vilaverd, un poble que té una gran extensió per la població que té, a part el seu polígon industrial és molt gran fet que fa que el seu contorn sigui més llis i per tant la seva dimensió fractal és menor. El mateix passa en el penúltim poble que té un gran càmping. Tot seguit hi ha l'estadística que confirma el fet que els pobles petits tenen més dimensió fractal.

| Dimensió fractal superior a 1,4 |   |
|---------------------------------|---|
| Pobles petits                   | 9 |
| Pobles                          | 2 |
| Pobles grans                    | 0 |
| Pobles molt grans               | 0 |



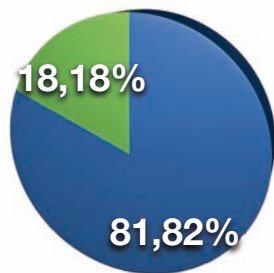
| Dimensió fractal inferior a 1,4 |   |
|---------------------------------|---|
| Pobles petits                   | 3 |
| Pobles                          | 3 |
| Pobles grans                    | 3 |
| Pobles molt grans               | 4 |



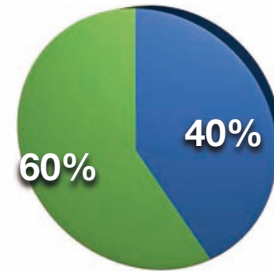
Com és pot veure en els gràfics, els pobles petits predominen en les dimensions fractals superiors a 1,4, mentre que en les dimensions fractals inferiors a 1,4 queda repartit per igual aproximadament.

Ara analitzem la quantitat de cada tipus de poble que pertany a la dimensió superior i a la dimensió inferior.

| POBLES PETITS                   |   |
|---------------------------------|---|
| DIMENSIÓ FRACTAL SUPERIOR A 1,4 | 9 |
| DIMENSIÓ FRACTAL INFERIOR A 1,4 | 2 |



| POBLES                          |   |
|---------------------------------|---|
| DIMENSIÓ FRACTAL SUPERIOR A 1,4 | 2 |
| DIMENSIÓ FRACTAL INFERIOR A 1,4 | 3 |



| POBLES GRANS                    |   |
|---------------------------------|---|
| DIMENSIÓ FRACTAL SUPERIOR A 1,4 | 0 |
| DIMENSIÓ FRACTAL INFERIOR A 1,4 | 2 |



| POBLES MOLT GRANS               |   |
|---------------------------------|---|
| DIMENSIÓ FRACTAL SUPERIOR A 1,4 | 0 |
| DIMENSIÓ FRACTAL INFERIOR A 1,4 | 4 |



Com podem veure en els gràfics i les taules, els pobles petits són majoritàriament de dimensió gran, exceptuant-ne alguns. Els pobles (referint-me als pobles de tipus “poble”) es reparteixen quasi per igual, però hi ha més pobles amb la dimensió fractal inferior a 1,4. Quant als pobles grans i molt grans podem veure com tots tenen una dimensió fractal inferior a 1,4.

Un altre aspecte és que en general la dimensió fractal dels pobles va des de 1,506 fins a 1,319, per tant, al ser una dimensió força gran podem concloure que són pobles amb un contorn molt arrugat i amb certa tendència a ser fractals i fins i tot, a ser auto-similars en cert grau.

## 4.6 Conclusions de les fractals

En aquest punt 4 hem vist que les fractals semblen uns cosos caòtics i estranys, però realment segueixen patrons molt simples i no són gens estranys, ja que tot el que ens envolta té certa fractalitat, exceptuant-ne les coses llises. També hem pogut observar com crear els conjunts de Julia mitjançant la funció  $f(z) = z^2 + C$  i com dibuixar-los en el pla complex amb la iteració de la funció i pintant el punt del pla amb el color corresponent. També hem vist que el conjunt de Mandelbrot és l'agrupació de tots els conjunts de Julia.

Com hem pogut veure en els dos estudis realitzats, les fractals a part d'aparèixer en plans complexos o en la natura, també apareixen en la Conca de Barberà. Primer en les muntanyes de Prades i Poblet, que com hem vist tenen una dimensió d'entre 1,049 en els prats de la falda de la muntanya fins a una dimensió de 1,238 a la part superior de la muntanya entre Rojals i Prades. Aquest fet ens fa veure que aquesta muntanya té certa semblança amb les fractals que hem explicat abans d'aquest estudi, perquè si en volguéssim determinar la longitud entre dos punts seria molt difícil o fins i tot impossible, ja que, hauríem de fer servir una mesura totalment precisa i aquesta no existeix, aquest fet el podem comprovar per exemple, mesurant en un mapa de escala 1:200 i un altre de escala 1:400, sempre ens sortirà més exacta la mesura del mapa amb l'escala més petita (en aquest cas 1:200), i la manera de poder mesurar-ho amb un 100% d'exactitud no existeix, solament existeix per els cossos que segueixen la geometria euclidiana. Un altre aspecte important de l'estudi de la dimensió fractal de les muntanyes de Prades i Poblet, és que per tenir una dimensió superior a 1 i inferior a 2 podem dir que aquesta muntanya té cert grau d'auto-similitud, com a mínim en petites distàncies concretes; no em refereixo a que si la muntanya té una forma i ens hi acostem molt, veurem que té repliques seves en ella, ja que, això és impossible, sinó que té "cert" grau d'auto-similitud. Per argumentar que les muntanyes tenen cert grau d'auto-similitud, faré un exemple. Suposem que anem per la muntanya i ens topem amb una roca molt gran, lògicament no podrem passar-hi per damunt i l'hauré de vorejar, ara suposem que per aquella muntanya també hi passeja una formiga, aquesta es toparà amb una pedreta diminuta als ulls humans, però immensa per a ella i l'haurà de vorejar igualment, d'altra banda amb aquest exemple també podem destacar que si posem la formiga i l'home a la falda de la muntanya i els fem anar fins al

cim, podem dir que l'home ha fet un recorregut menor que la formiga, perquè aquesta ha hagut de passar per totes les irregularitats del terra que l'home pot passar amb un sol pas, fet que també justifica que la distància de la muntanya fractal entre dos punts és difícil, i fins i tot, impossible de calcular amb total exactitud.

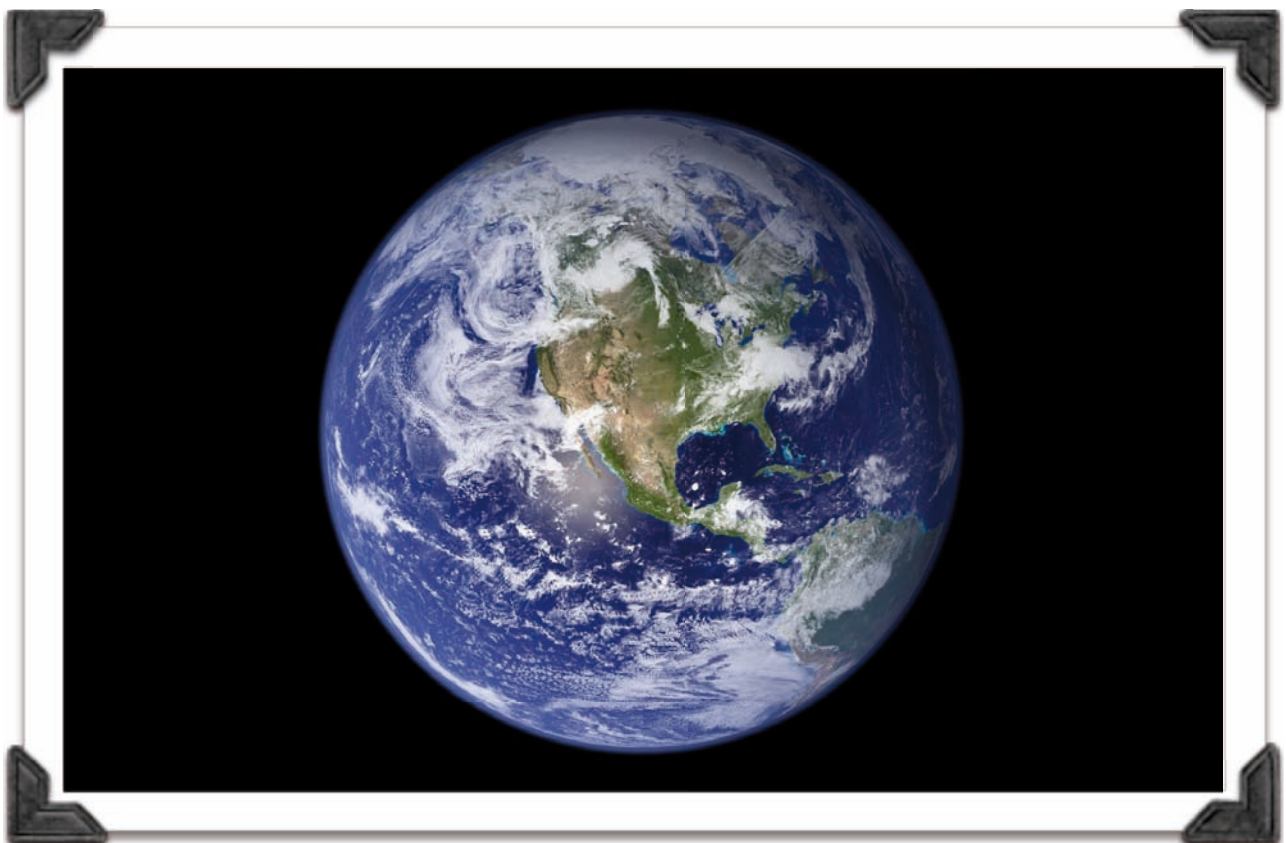
Pel que fa a l'estudi dels pobles, podem concloure dient que els pobles de la Conca de Barberà tenen un contorn amb propietats fractals. Concretament la dimensió fractal dels seus contorns va des de 1,319 fins a 1,506, dimensions que són més que suficients per demostrar-ne la fractalitat del contorn. El fet que aquestes dimensions siguin tan grans és degut a que en els pobles de la Conca hi viu poca gent (fins i tot en els que he anomenat "molt grans", ja que, l'escala l'he fet tenint en compte que la majoria de pobles no sobrepassen els 200 habitants i, per exemple, un poble de 1000 habitants és molt gran respecte un de 100) i com ja he explicat, com menys gent viu en un poble més rugós tendeix a ser el contorn del poble i per tant tindrà més dimensió fractal. Aquest fet també l'hem vist en la majoria de pobles petits, alguns dels quals no deuen superar les 20 cases, cosa que fa que el contorn estigui molt marcat per les parets que delimiten aquestes poques cases i això a la seva vegada fa augmentar la dimensió fractal. La dimensió fractal d'aquests pobles, de la mateixa manera que a les muntanyes, els dona la característica que en cert grau el seu contorn té auto-similitud a alguna escala.

Resumint una mica, podríem dir que les fractals ens acompanyen tota la vida, tot absolutament tot té cert grau de fractalitat, només se'n salven els cossos totalment llisos que podríem considerar-los inexistents. També hem vist que a la Conca tenim uns pobles amb contorn fractal força gran i unes muntanyes que també tenen característiques de fractal, tot i que no tan marcades com en els pobles.

## 5. Conclusions del treball

La natura és matemàtiques, tot el que ens envolta té una característica matemàtica, les muntanyes són fractals; algunes flors segueixen la proporció àuria; els pobles creats per l'home tenen un contorn fractal, i fins i tot, el propi home té proporcions àuries en el seu cos i també fractals com els vasos sanguinis o els pulmons que es ramifiquen de forma fractal.

D'aquest fet en podem treure una conclusió molt important, les matemàtiques en el món són com els plànols de la casa, res pot existir sense elles, la casa si no està ben planificada s'enfonsa, el món sense les matemàtiques no seria el món tal i com el coneixem, és per això, per la qual cosa hem d'estimar les matemàtiques i no solament això sinó estudiar-les cada dia, així estudiarem el món i la seva complexitat que el fa tant curiós i meravellós.



## 6. Bibliografia

Algunes pàgines de la Viquipèdia s'han consultat en diferents idiomes, ja que, en anglès hi ha més informació o està més ben explicada que no pas en la versió catalana o castellana.

- “La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza” de Fernando Corbalán
- Revista “Suma +” del més de novembre de 2010
- “Los objetos fractales” de Benoît Mandelbrot
- Mapa topogràfic “El bosc de poblet escala 1:15000 ” de l'editorial Piolet
- “[http://ca.wikipedia.org/wiki/Conca\\_de\\_Barberà](http://ca.wikipedia.org/wiki/Conca_de_Barberà)” (llista de pobles de la Conca de Barberà
- “[http://ca.wikipedia.org/wiki/Secció\\_àuria](http://ca.wikipedia.org/wiki/Secció_àuria)”
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Leda\\_atómica](http://es.wikipedia.org/wiki/Leda_atómica)”
- Documental del programa Redes “La proporción aurea”
- “[http://www.florachilena.cl/Asignaturas/Dendrologia/Material/Morfologia%20Foliar%20y%20Filotaxia%20v2.0%20\(2003\).pdf](http://www.florachilena.cl/Asignaturas/Dendrologia/Material/Morfologia%20Foliar%20y%20Filotaxia%20v2.0%20(2003).pdf)” Per classificar les fulles en l'apartat “3.4 Estudi del nombre d'or en les fulles”
- “<http://www.arrakis.es/~sysifus/intro.html>”
- “<http://ca.wikipedia.org/wiki/Fractal>”
- Video “[http://www.ted.com/talks/benoit\\_mandelbrot\\_fractals\\_the\\_art\\_of\\_roughness.html](http://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness.html)”
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Función\\_de\\_Weierstrass](http://es.wikipedia.org/wiki/Función_de_Weierstrass)”
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto\\_de\\_Cantor](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor)”
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Curva\\_de\\_Peano](http://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Peano)”
- El programa Fractalyse per calcular les dimensions fractals
- El programa Fraqtive per expolar el conjunt de Mandelbrot
- El programa Complex Calculator Presicion 18, per fer calculs amb nombres complexos
- “<http://www.youtube.com/watch?v=2AZYZ-L8m9Q>” per saber com crear conjunts de Julia
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Dimensión\\_fractal](http://es.wikipedia.org/wiki/Dimensión_fractal)”
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto\\_de\\_Mandelbrot](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot)”
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Benoît\\_Mandelbrot](http://es.wikipedia.org/wiki/Benoît_Mandelbrot)”
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Copo\\_de\\_nieve\\_de\\_Koch](http://es.wikipedia.org/wiki/Copo_de_nieve_de_Koch)”
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto\\_de\\_Julia](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Julia)”
- “[http://es.wikipedia.org/wiki/Dimensión\\_fractal](http://es.wikipedia.org/wiki/Dimensión_fractal)”
- “<http://www.youtube.com/watch?v=cVO85iZTLWE&feature=related>”

## 7. Agraïments

M'agradaria agrair a la tutora del meu treball, la Reis, per el seu suport i la seva ajuda en alguns moments de confusió. També, agraeixo a la meva família per l'ajuda rebuda i també els dono les gràcies per participar en l'estudi de la proporció àuria en el cos humà. També m'agradaria donar les gràcies al meu amic David que també va participar en l'estudi. I per suposat també agraeixo la seva ajuda a totes les persones que hi han col·laborat indirectament, com els programadors dels programa de anàlisi de dimensió fractal o d'exploració de conjunts fractals.

Sense tots vosaltres no hagués estat possible

Moltes Gràcies

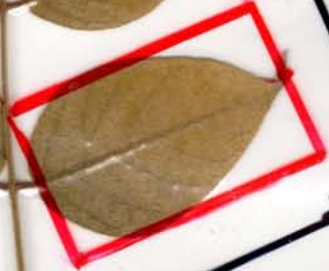


## **Annex: Fulles de l'estudi del nombre d'or en les fulles**

**Fulles amb el  
nombre d'or**

1

2


 $A = 2.5 \text{ cm}$ 
 $LL = 4 \text{ cm}$ 

 $LL = 3.4 \text{ cm}$ 
 $A = 2.1 \text{ cm}$ 

$$\frac{LL}{A} = \frac{4}{2.5} = 1.6 \approx \Phi$$

$$\frac{LL}{A} = \frac{3.4}{2.1} = 1.619 \approx \Phi$$

3

$A = 3.5 \text{ cm}$



$LL = 5.6 \text{ cm}$

$$\frac{LL}{A} = \frac{5.6}{3.5} = 1.62 \Phi$$

4



$A = 1.5 \text{ cm}$

$LL = 2.4 \text{ cm}$

$$\frac{LL}{A} = \frac{2.4}{1.5} = 1.62 \Phi$$

5

$A = 2.9 \text{ cm}$

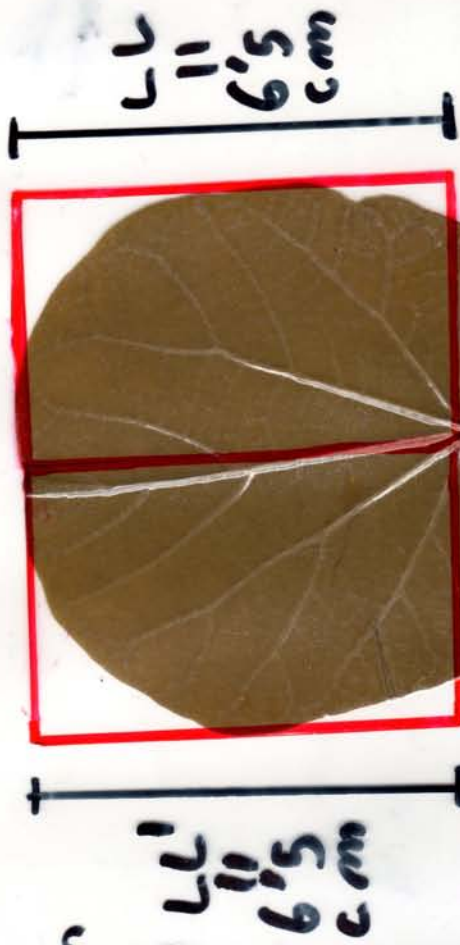


$LL = 4.8 \text{ cm}$

$$\frac{LL}{A} = \frac{4.8}{2.9} = 1.65 \Phi$$

7

$A' = 4 \text{ cm}$   $A = 4 \text{ cm}$



$$\frac{L'L'}{A} = \frac{4.9}{3} = 1.63 \approx \Phi$$

$$\frac{L'L'}{A} = \frac{6.5}{4} = 1.625 \approx \Phi$$

$$\frac{L'L'}{A'} = \frac{6.5}{4} = 1.625 \approx \Phi$$

6

$A = 3 \text{ cm}$



$L'L' = 4.9 \text{ cm}$

$$\frac{L'L'}{A} = \frac{5.85}{3.65} = 1.6027 \approx \Phi$$

8

$A = 3.65 \text{ cm}$



$L'L' = 5.85 \text{ cm}$

9

$$A = 4'3\text{cm}$$



$$LL = 6'9\text{cm}$$

$$\frac{LL}{A} = \frac{6'9}{4'3} = 1'6046 \approx \Phi$$

10

$$A = 3'6\text{cm}$$



$$LL = 5'8\text{cm}$$

$$\frac{LL}{A} = \frac{5'8}{3'6} = 1'61 \approx \Phi$$

11

$$LL = 5'7\text{cm}$$

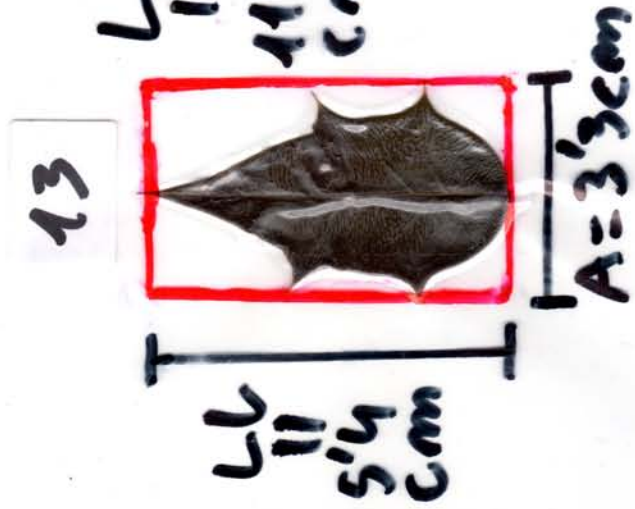


$$A = 3'5\text{cm}$$

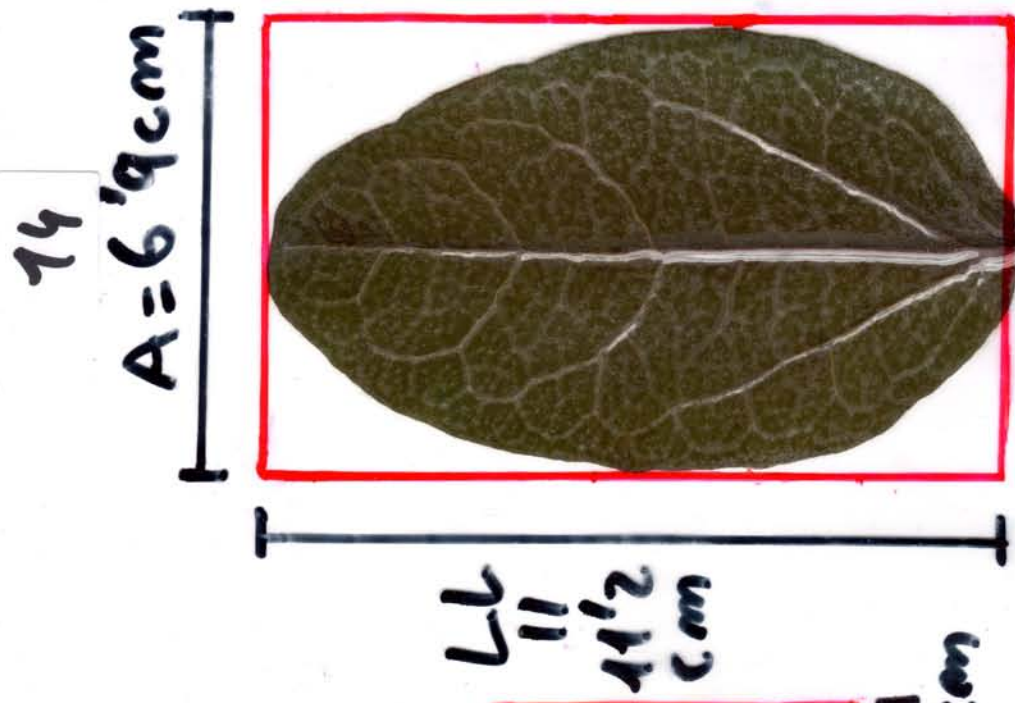
$$\frac{LL}{A} = \frac{5'7}{3'5} = 1'6285 \approx \Phi$$



$$\frac{L}{A} = \frac{11}{6.8} = 1.6176 \approx 1.62$$



$$\frac{L}{A} = \frac{5.4}{3.3} = 1.636 \approx 1.64$$



$$\frac{L}{A} = \frac{11.2}{6.9} = 1.6231 \approx 1.62$$



15

A = 1.4 cm

22  
11  
1.8 cm



H

$$\frac{22}{A} = \frac{1.8}{1.4} = 1.632 \Phi$$

16

A = 1.9 cm

22  
11  
3.4 cm



H

$$\frac{22}{A} = \frac{3.4}{1.9} = 1.63157 \dots \approx 2 \Phi$$

17

A = 3.1 cm

22  
11  
5 cm



$$\frac{22}{A} = \frac{5}{3.1} = 1.6129 \dots \approx 2 \Phi$$

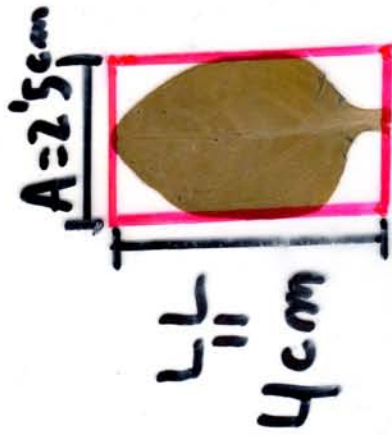
18

$$2L = 15'9\text{cm}$$

$$A = 9'8\text{cm}$$

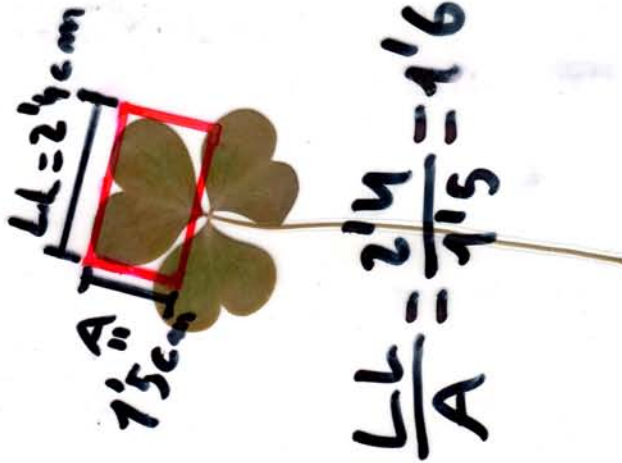
$$\frac{LL}{A} = \frac{15'9}{9'8} = 1'622448... \approx \underline{\underline{1.62}}$$

19



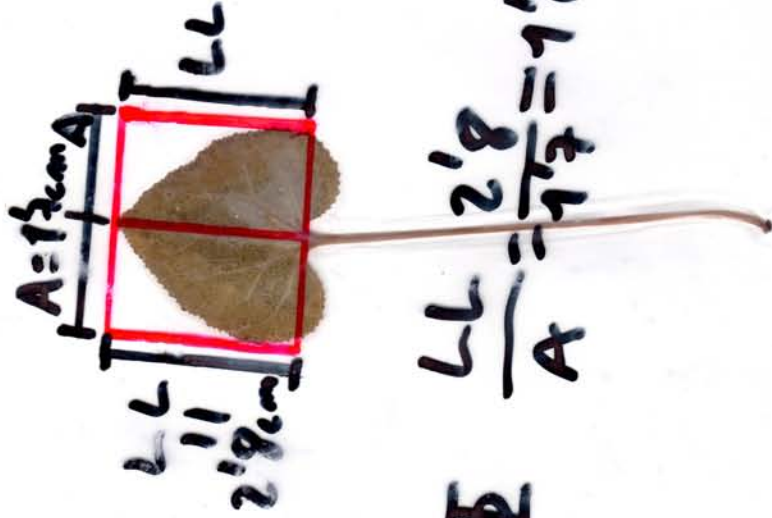
$$\frac{L_L}{A} = \frac{4}{2.5} = 1.6 \approx \Phi$$

20



$$\frac{L_L}{A} = \frac{2.4}{1.5} = 1.6 \approx \Phi$$

21



$$\frac{L_L}{A} = \frac{2.9}{1.3} = 2.23 \approx \Phi$$

22

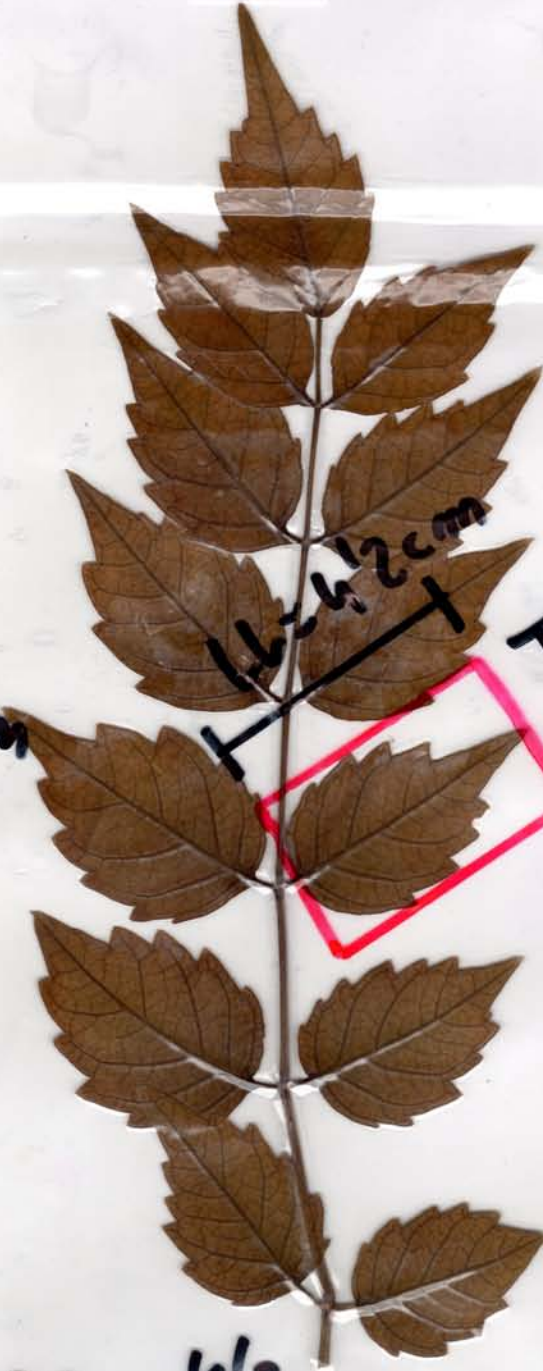
$A = 5'25 \text{ cm}$



$2L = 8'4 \text{ cm}$

$$\frac{2L}{A} = \frac{8'4}{5'25} = 1'6 \approx \Phi$$

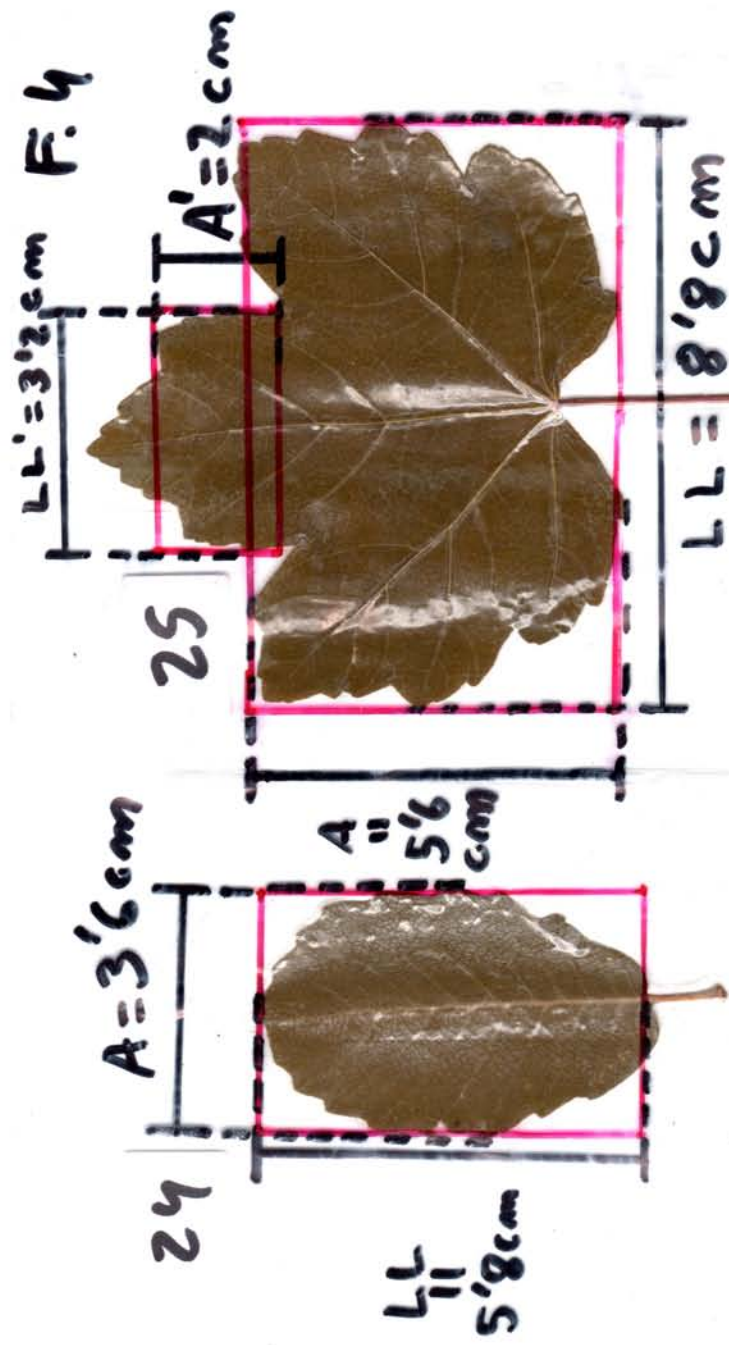
23



$L = 4'2 \text{ cm}$

$A = 2'6 \text{ cm}$

$$\frac{L}{A} = \frac{4'2}{2'6} = 1'61538 \approx \Phi$$



$$\frac{L}{A} = \frac{5.8}{3.6} = 1.611... \approx 1.6$$

$$\frac{L}{A} = \frac{8.8}{5.6} = 1.571... \approx 1.5$$

$$\frac{LL}{A} = \frac{18'3}{11'3} = 1'619... \approx \Phi$$

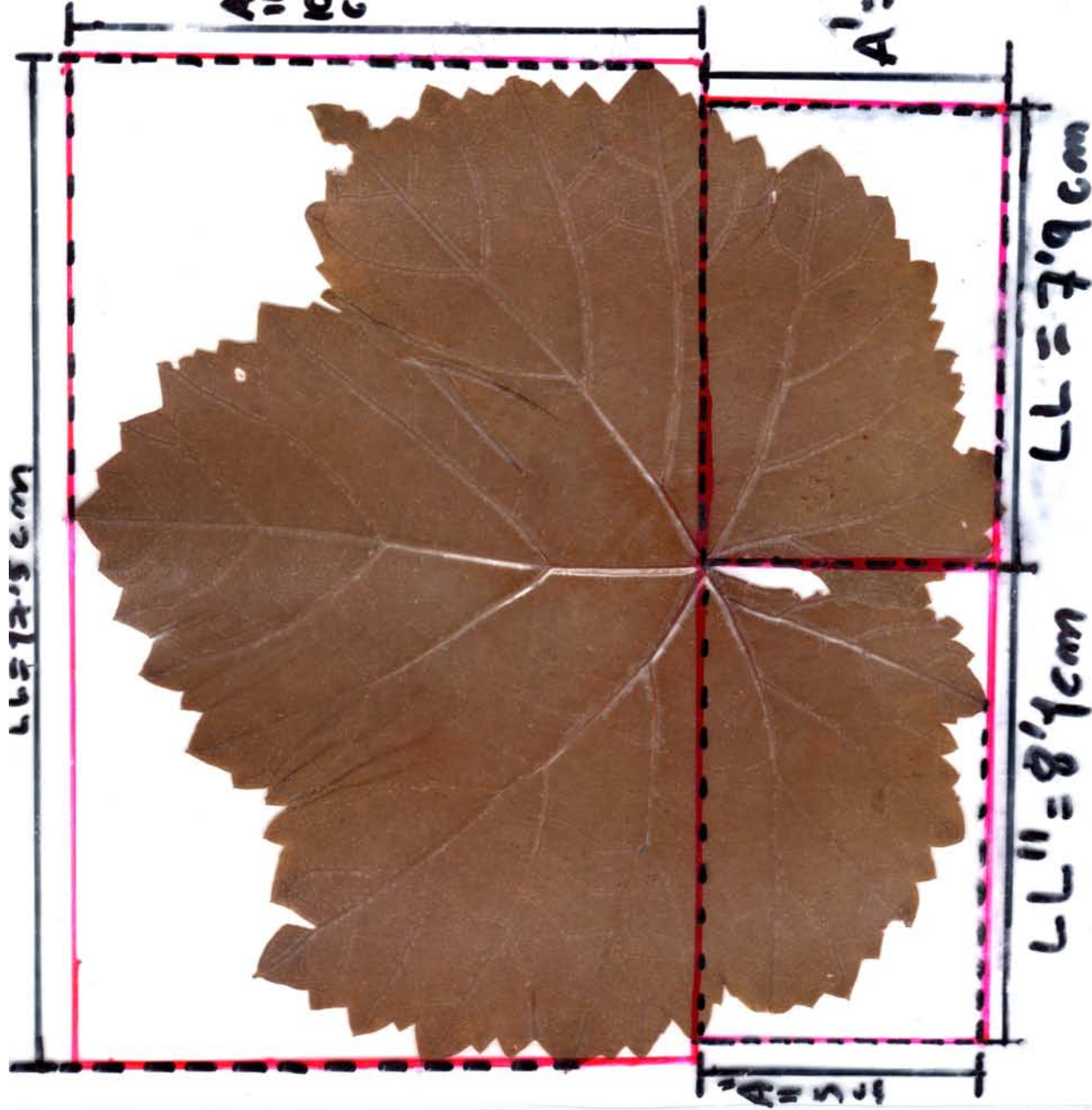
26

$$LL = 18'3 \text{ cm}$$

$$A = 11'3 \text{ cm}$$



LL = 12.5 cm



$$\frac{LL}{A} = \frac{12.5}{10.9} = 1.605 \approx \Phi$$

$$\frac{LL'}{A'} = \frac{7.7}{5} = 1.54 \approx \Phi$$

$$\frac{LL''}{A''} = \frac{8.4}{5} = 1.68 \approx \Phi$$

27

A' = 5 cm

LL' = 8.4 cm

LL = 7.7 cm

A'' = 5 cm

LL = 26.5 cm

28

A = 16

$$\frac{LL}{A} = \frac{26.5}{16} = 1.65625 \approx 1.66$$



$$\frac{LL}{A} = \frac{21}{13.4} \approx 1.5671 \dots \approx \Phi$$

29

$LL = 21 \text{ cm}$

$A = 13.4 \text{ cm}$



30

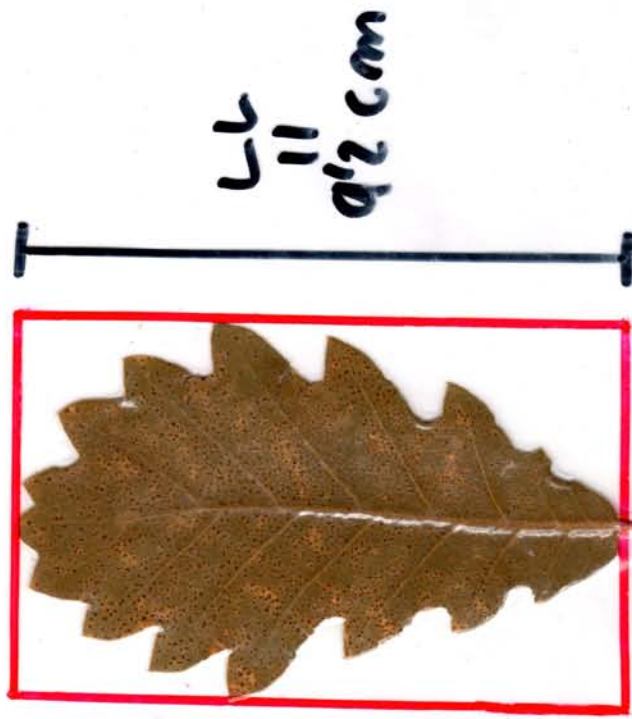
$LL = 5'6\text{cm}$



$$\frac{LL}{A} = \frac{5'6}{3'5} = 1'6 \approx \Phi$$

31

$A = 5'7\text{cm}$



$$\frac{LL}{A} = \frac{9'2}{5'7} = 1'6140 \approx \Phi$$

32

$$22 = 6'5 \text{ cm}$$



$$A = 4 \text{ cm}$$

$$\frac{22}{A} = \frac{6'5}{4} = 1'625 \approx \Phi$$

33

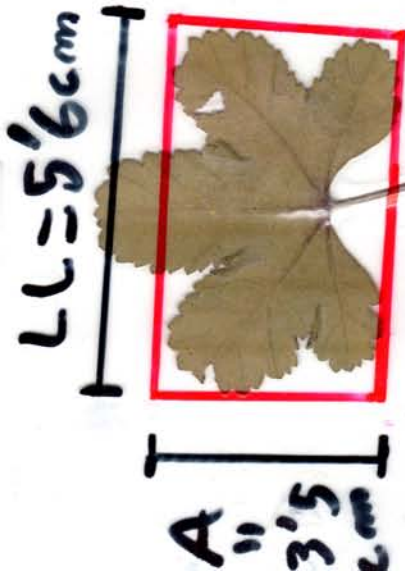
$$A = 5'4 \text{ cm}$$



$$22 = 8'6 \text{ cm}$$

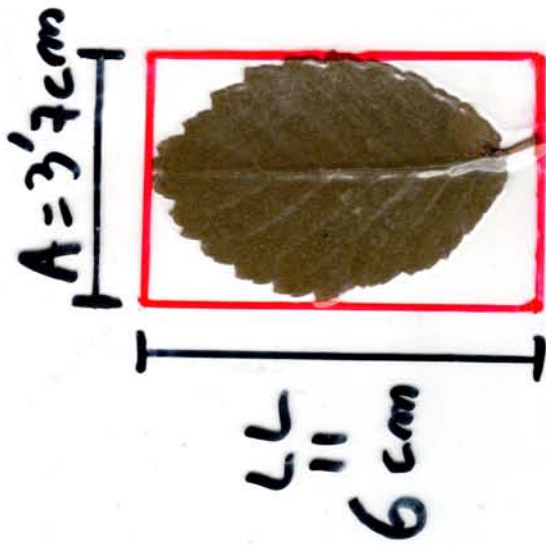
$$\frac{22}{A} = \frac{8'6}{5'4} = 1'576 \dots \Phi$$

34



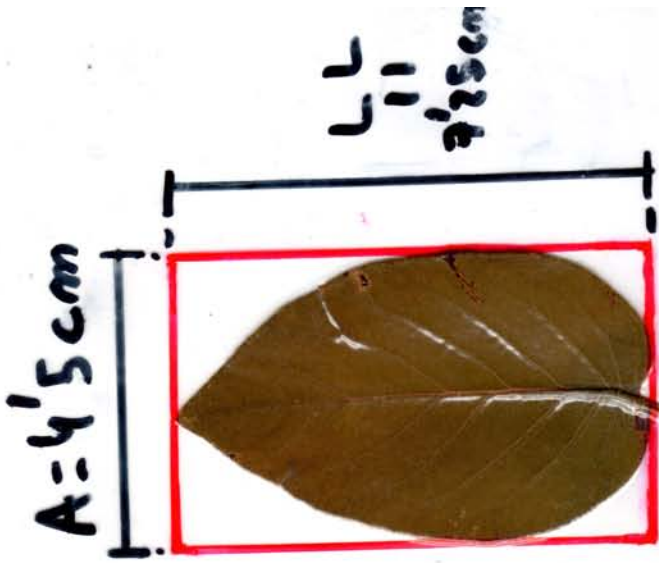
$$\frac{LL}{A} = \frac{5.6}{3.5} = 1.6 \approx \Phi$$

35



$$\frac{LL}{A} = \frac{6}{3.7} = 1.6216 \approx \Phi$$

36



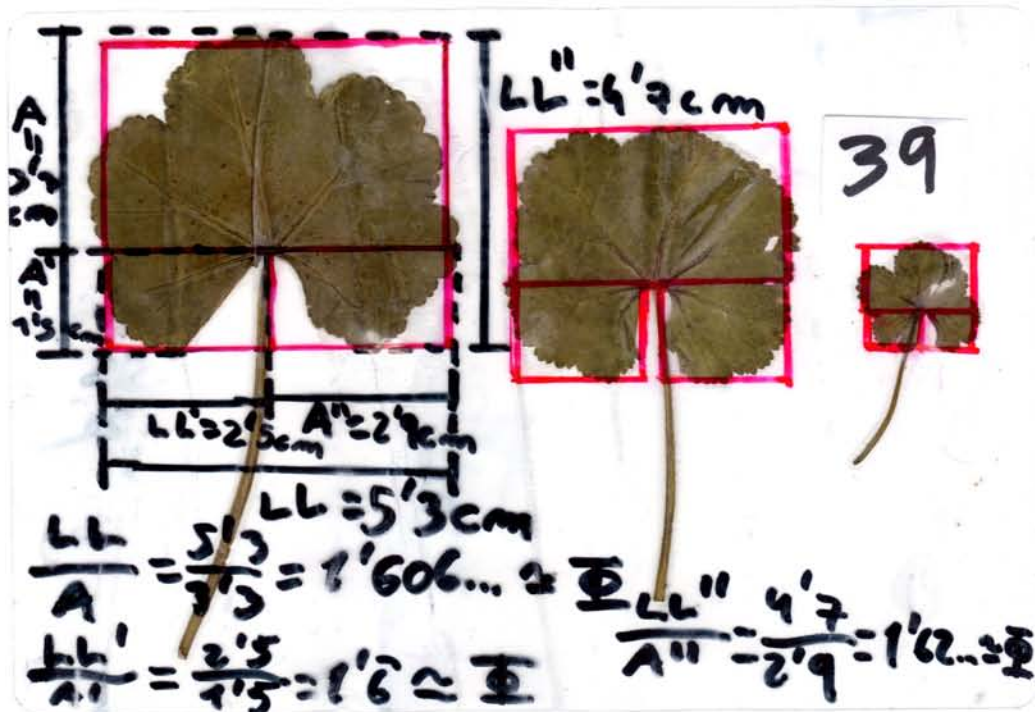
$$\frac{LL}{A} = \frac{7.25}{4.5} = 1.61 \approx \Phi$$



$$\frac{LL}{A} = \frac{10}{6.2} = 1.6129... \approx \Phi$$

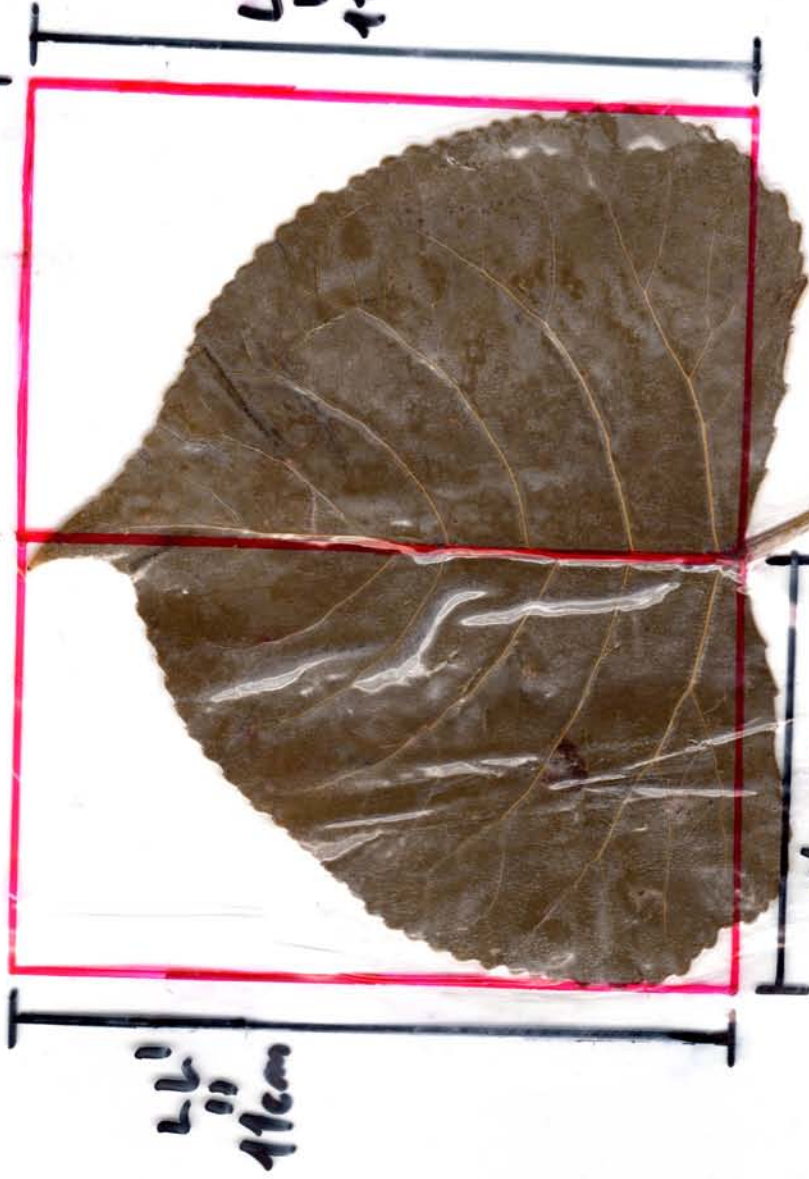


$$\frac{LL}{A} = \frac{10}{6.3} = 1.587... \approx \Phi$$



40

$A = 6'8 \text{ cm}$



$L' = 11 \text{ cm}$

$A' = 6'6 \text{ cm}$

$$\frac{L'}{A} = \frac{11}{6'8} = 1'6126 \dots \approx \Phi$$

$$\frac{L'}{A'} = \frac{11}{6'6} = 1'6 \approx \Phi$$

41

$L' = 11 \text{ cm}$

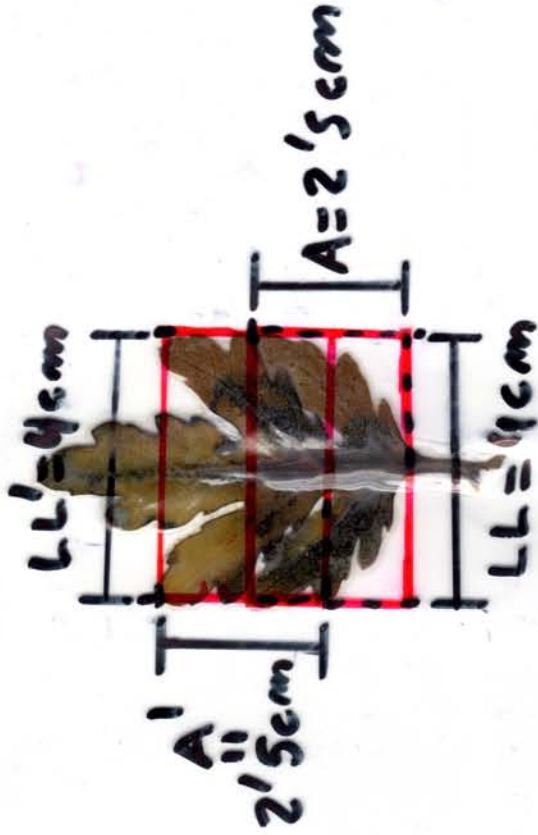


$A = 1'9 \text{ cm}$

$L' = 3'4 \text{ cm}$

$$\frac{L'}{A} = \frac{3'4}{1'9} = 1'6315 \dots \approx \Phi$$

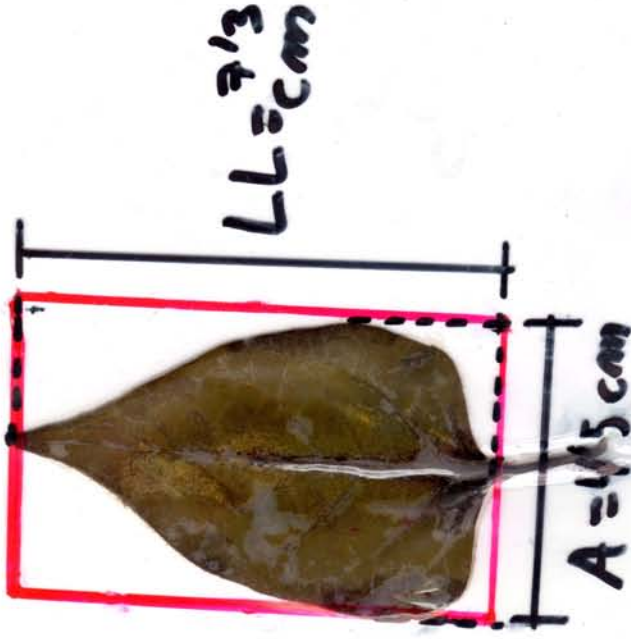
42



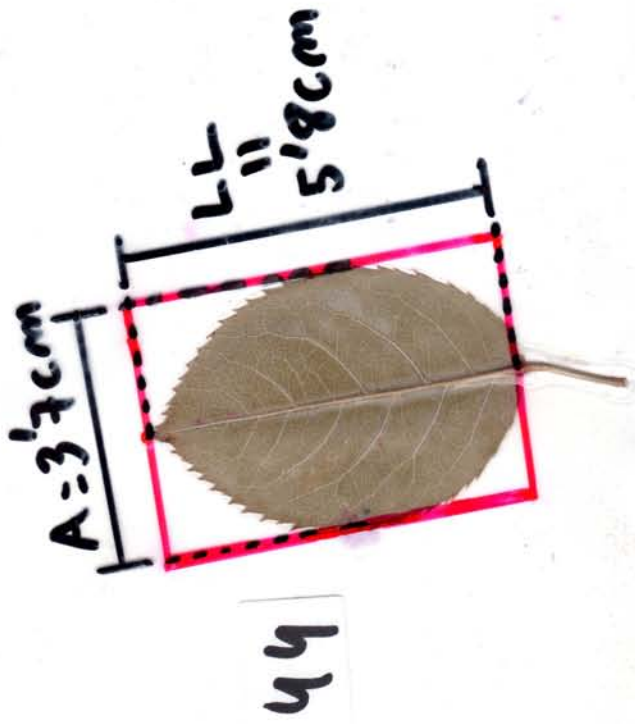
$$\frac{LL}{A} = \frac{4}{2.5} = 1.6 \approx \Phi$$

$$\frac{LL'}{A'} = \frac{4}{2.5} = 1.6 \approx \Phi$$

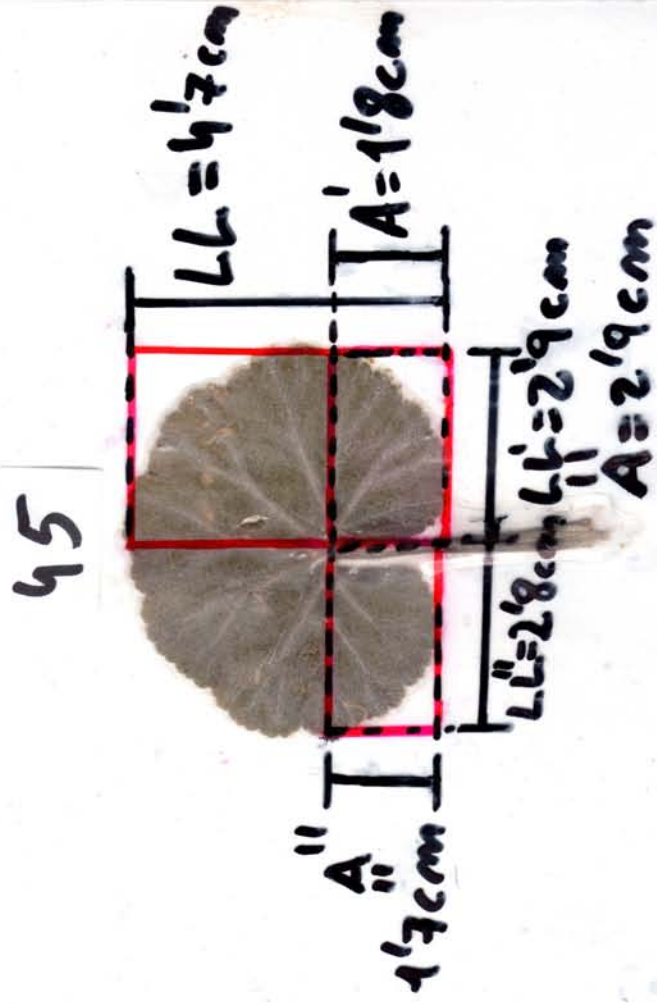
43



$$\frac{LL}{A} = \frac{\frac{7}{3}}{1.5} = 1.6 \approx \Phi$$



$$\frac{L''}{A} = \frac{5'8}{3'7} = 1'5675... \approx \Phi$$



$$\frac{L}{A} = \frac{4'7}{2'9} = 1'6206... \approx \Phi$$

$$\frac{L'}{A'} = \frac{2'9}{1'8} = 1'61 \approx \Phi$$

$$\frac{L''}{A''} = \frac{2'9}{1'7} = 1'647... \approx \Phi$$

**Fulles sense el  
nombre d'or**

46



47



48



49



50



51



52



53



54



55



56



61



64



60



63



59



58



62



57





70



68



69



67



99



59

74



73



72



71



76



77

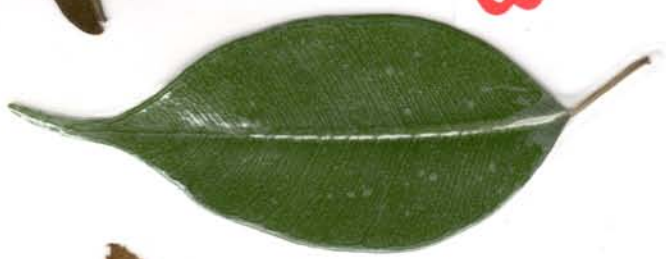


75





08



38



79



28



18



87



98



58



48



68



88



78

93



92



91



94



90



98



97



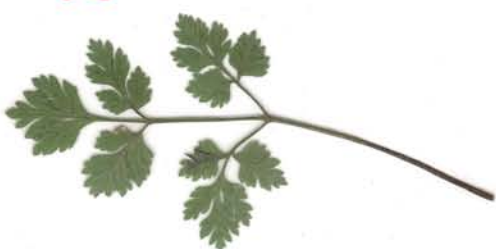
96



95



101



100



99



105



108



104



107



103



106



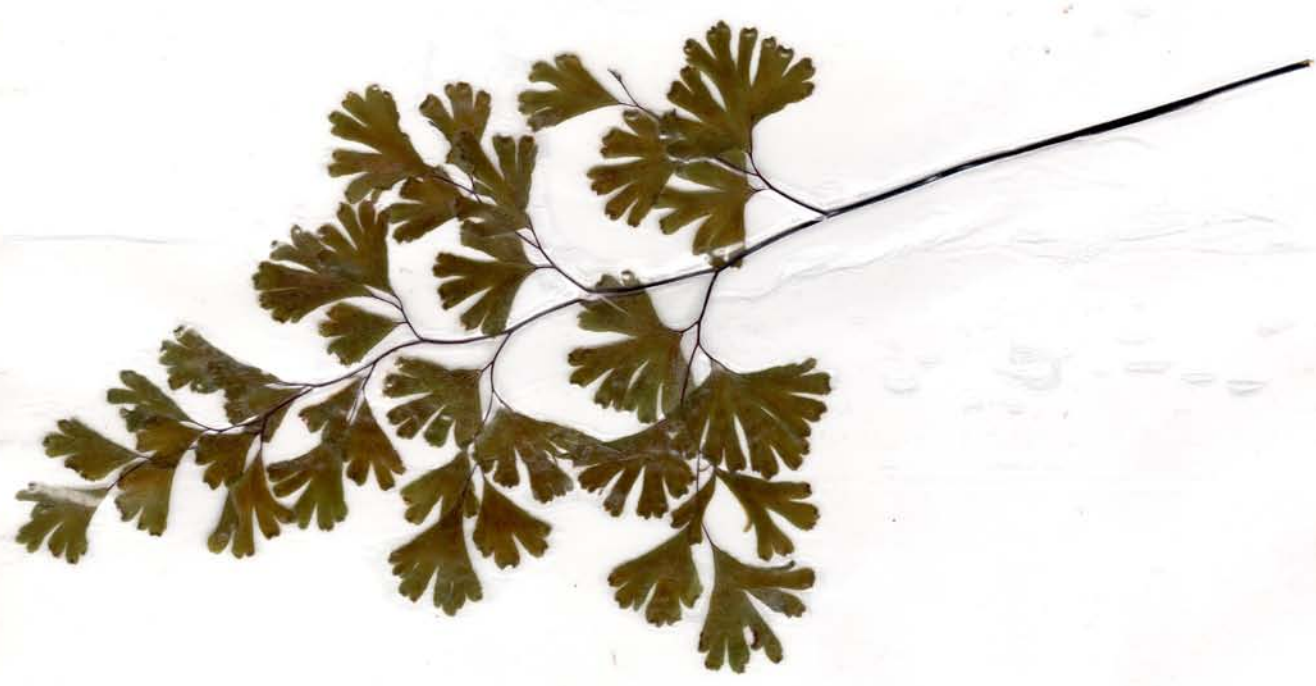
102



## **Annex: Fulles dels fractals en la natura**

FITXA  
1





FTX A  
2

FITx4  
3





FITXA  
4

Flux 5



FITXA  
6



PTX4  
7



FIG 4  
8



