

Soc irracional però, transcendent?

Josep Lluís Pol i Llompart

Daniel Ruiz Aguilera

SCIT'09



CèntMat
Centre d'Aprenentatge Científic Matemàtic



El coneixement produeix plaer,
el desconeixement angoixa



Ελλάδα, segle V aC



La raó ho governa tot

Els tons de la música
agradable estan en
relació de raons senzilles

Els planetes giren bé a
distàncies correctes i
produeixen la música de
les esferes



Però quina casta de nombres decimals podem obtenir només amb raons (fraccions) de nombres enters?

$$20 / 4 = 5$$

$$256 / 512 = 0,5$$

$$132 / 3 = 44$$

$$489 / 4890 = 0,1$$

$$1 / 3 = 0,333333...$$

$$250 / 99 = 2,525252...$$

$$1 / 7 = 0,14285714...$$

$$? / ? = 0,1010010001...$$

$$? / ? = 0,12345678910111213...$$



Fragment d'una pàgina dels Elements d'Euclides

Per què els grecs no ho descobriren ben prest?

HIPÀS
de
METAPON

INCOMMENSURABLES

DAVID HILBERT

1862-1943

UNIVERSITY OF

SARAH HILBERT

1862-1943

UNIVERSITY OF



Babilònia,
1650 aC



30

1

24

51

10



42

25

35

Costat = 30

1a línea diagonal = 1;24,51,10

2a línea diagonal = 42;25,35

En el sistema sexagesimal, $x_{30} = x_{60} / 2$

$$1;24,51,10 \times 30 = (1;24,51,10 / 2) \times 60 = 42;25,35$$

En el sistema decimal

$$30 = 30$$

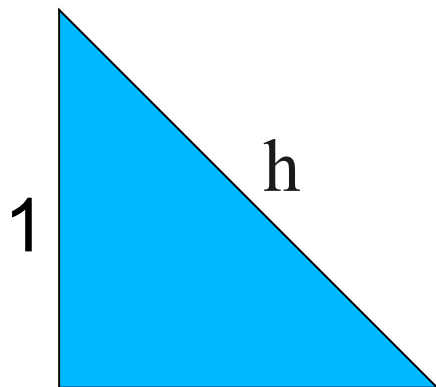
$$1;24,51,10 = 1,41421296$$

$$42;25,35 = 42,4263888$$

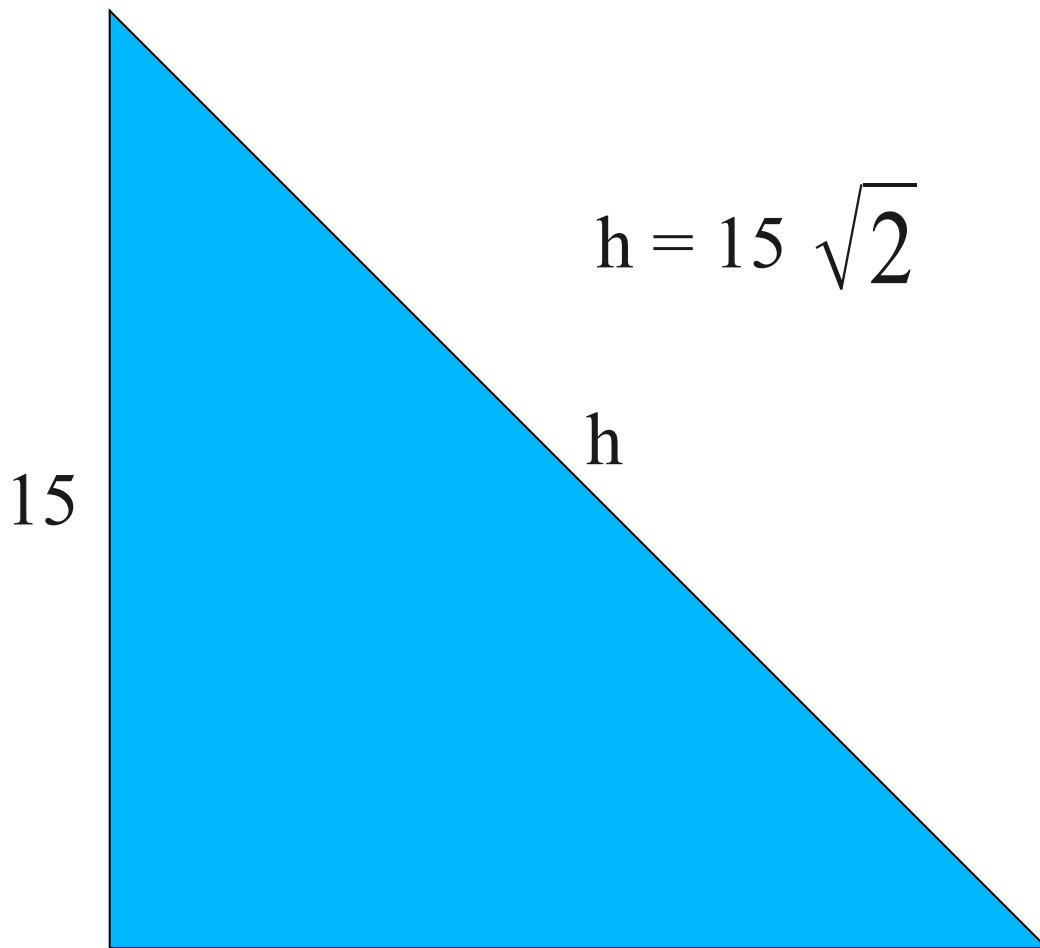
$$(1;24,51,10)^2 = 1;59,59,59,38,1,40$$

$$\varepsilon < 22/60^4$$

S'ha pres el valor de 1,414213 en comptes
de 1,414214...



$$h = \sqrt{2}$$



$$h = 15\sqrt{2}$$

15

Perquè l'arrel quadrada d'un nombre natural, si no és natural, no pot tenir un nombre finit de xifres decimals?

Podria acabar en 1?

Podria acabar en 2?

Podria acabar en 3?

...

D'acord, no pot tenir un nombre finit de xifres decimals però, podrien ser periòdiques?

PROVA D'EUCCLIDES (s. III aC)

Si l'arrel quadrada de dos fos periòdica, voldria dir que seria racional, és a dir, que es podria escriure com a fracció irreductible de dos enters.

$$\sqrt{2} = m/n \quad 2 = m^2/n^2 \quad m^2 = 2n^2 \quad \text{Llavors } m^2 \text{ és parell}$$

Llavors m és parell Llavors puc posar $m = 2k$ $(2k)^2 = 2n^2$

$$4k^2 = 2n^2 \quad 2k^2 = n^2 \quad \text{Llavors } n^2 \text{ també és parell}$$

Llavors n també és parell

Però si n i m són parells, la fracció es podia simplificar

Això contradiu les premisses.

El sistema DIN-A de paper







El sistema DIN-A és l'únic que conserva les proporcions en retallar-lo per la meitat. Per què?

La proporció és: $\text{altura} / \text{amplada}$

Si el rectangle gran és a/b , la meitat serà $b/(a/2)$, i hauran de ser iguals

$$a/b = b/(a/2)$$

$$a/b = 2b/a$$

$$a^2 = 2b^2$$

$$a = \sqrt{2} b$$

Mesures d'un full DIN A4 : $29,7 \text{ cm} / 21 \text{ cm} = 1,414285\dots$

Valor de l'arrel quadrada de dos: $= 1,414213\dots$

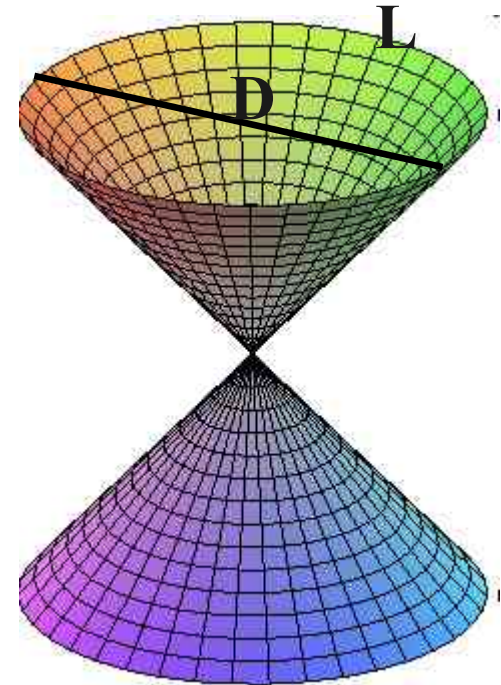
A low-angle photograph looking up at several tall palm trees and papyrus plants against a clear blue sky. The palm fronds are dark green and fan-like, while the papyrus plants have long, thin, feathery green leaves. The perspective makes the trees appear to converge towards the top of the frame.

Paper

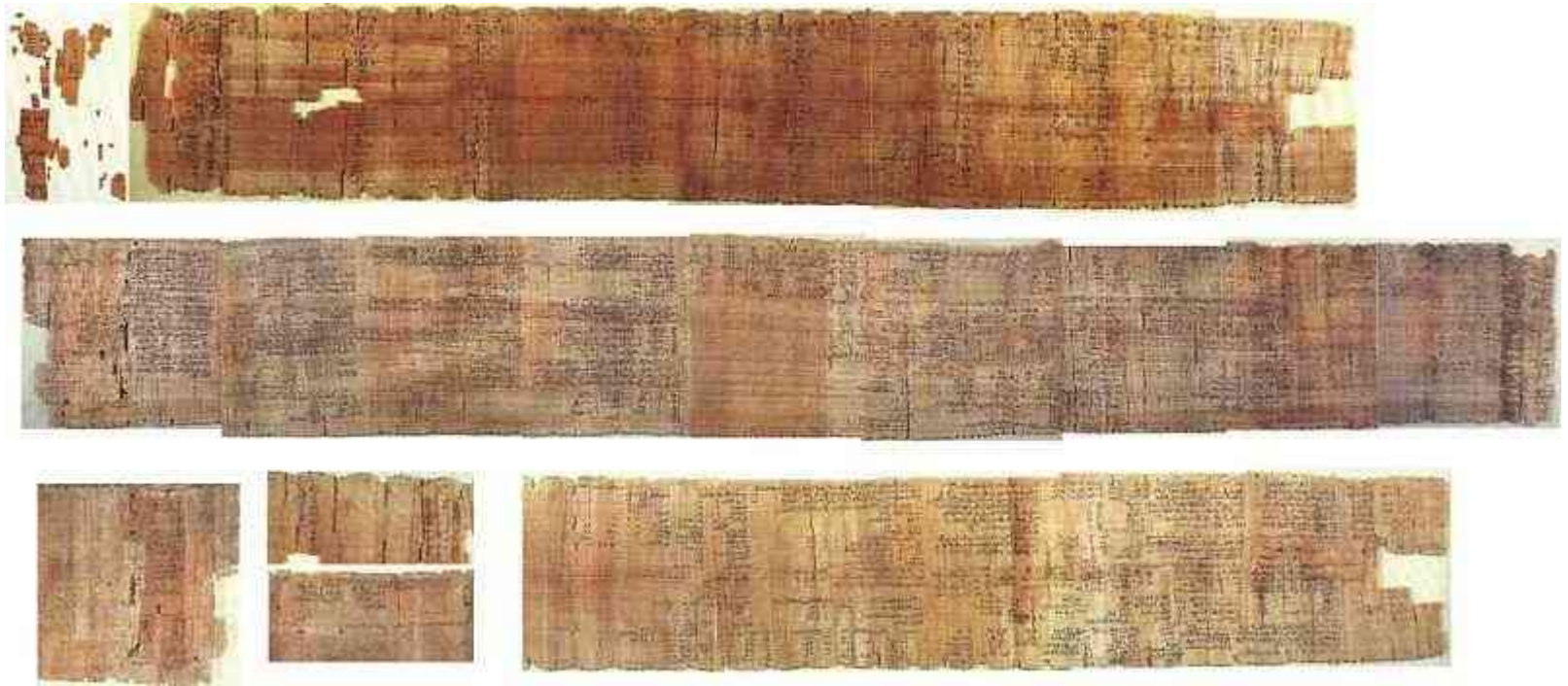
Papir



Família de les coníferes

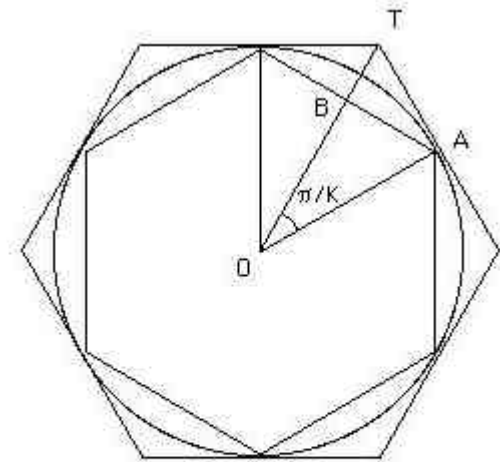


$$L/D = \text{constant}$$



1650 aC. Del papir Rhind, es pot deduir que els egipcis prenien aquesta constant com a 3,16

Error relatiu comès: $\frac{3,16 - 3,1415...}{3,141592...} < 0,60 \%$



$$\begin{aligned} OA &= 1 \\ AB &= \sin(\pi/K) \\ AT &= \tan(\pi/K) \\ \text{where } K &= 3 \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\pi = 22/7 = 3,1428\dots$$

Antic Testament, I Llibre dels Reis, 7-23 (1000-500 aC)

Féu, així mateix, un bací de fundició, de deu colzes de diàmetre, rodó, de cinc colzes d'alt i trenta de circumferència.

L'art de Conró (Montserrat Fontanet, Lloret, s. XVIII)

Nota que per canar una era o qualsevol radó hay a duas reglas: o quadrar- la y canar los quatre vents y trèurer el compte o canar-la ab duas canadas en creu y serà més aviat, y tant de una manera com de altre ca n'as tret el compte, puja lo que pujarà, has de llevar o trèurer la quarta part, y lo que quedara serà de terra.

- Fórmula de Leibniz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

- Producto de Wallis:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots = \frac{\pi}{2}$$

- Euler:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!^2}{(2n+1)!} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots = \frac{\pi}{2}$$

- Identidad de Euler

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

- Problema de Basilea, resuelto por Euler en 1735:

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

- Euler:

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

- Además, π tiene varias representaciones como fracciones continuas:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \frac{25}{11 + \frac{36}{13 + \frac{\cdots}{\ddots}}}}}}}$$

*Par o cero e impar
colocados en cadena están.
Del radio circular compañero.
Alguien descubrió
que no era racional
este número π ,
avanza, pues, sin fin.
Infinita red de dígitos variables
donde trasciende
su perfecta cualidad real.
Y maravilló siempre
a tantos geómetras
que dedicaron esfuerzos
con métodos miles y algoritmos
hasta calcular
la fantástica seriación decimal.
¡Para comprobar cómo
esta serie ilimitada es!*

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592		
3078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446		
0955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895		
4930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648		
566923460348610454777		70066063155881
7488152092096		54882046652138
414695194151		32611793105118
54807446237	27495673	575272485
4065664308	2139494639	1737190702
6752384674818467669405		300568127:
173637178721468440901:		534301465:
199561121290219608640		815981362
83729780499510597317:		096318595
3446850352619311881:		103137838:
4730359825349042875		311595628:
21712268066130019:		119590921:
8659361533818279		952035301
75283479131515:		4541506959
1754637464939		0092770167:
6601047101815		989467678374:
46208046684254:	2933136770289891:	205696602405803815
0193511253382430035587640247496473263914199272604269922796782354		
7816360093417216412199245863150302861829745557067498385054945885		
8692699569092721079750930295532116534498720275596023648066549911		
9881834797753566369807426542527862551818417574672890977772793800		
081647060016145249192173217214772350141441973568548161361157352...		

Interès compost



Si deixam 1€ al banc un any...

- Interès per any: 100%

1€.....2€

- Interès per semestres: 50%

1€.....1,5€.....2,25€

- Interès per trimestre: 25%

1€.....1,25€.....1,5625€.....1,9531€.....2,4414... €

- Interès per dia: $100/365\%$

1€.....2,71457... €

- Interès per minut: $100/(365*24*60)$

1€.....2,71828... €

Si ho poguéssim fer per segons, per mil·lisegons...

2,7182818284590452536...

Realment és fer l'expressió:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

per n grans



Jacob Bernoulli (1683)

- Saga de matemàtics
- Estudia l'interès compost
- Primeres aplicacions d'aquest nombre



Com és aquest nombre?

- Nombre *juvenil*:

Sempre està involucrat en creixements

- Batejat per Euler en 1787:

Nombre e

- Constant d'Euler
- Transcendent!

$$e = 2,7182818284590452536\dots$$

Nombre e

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

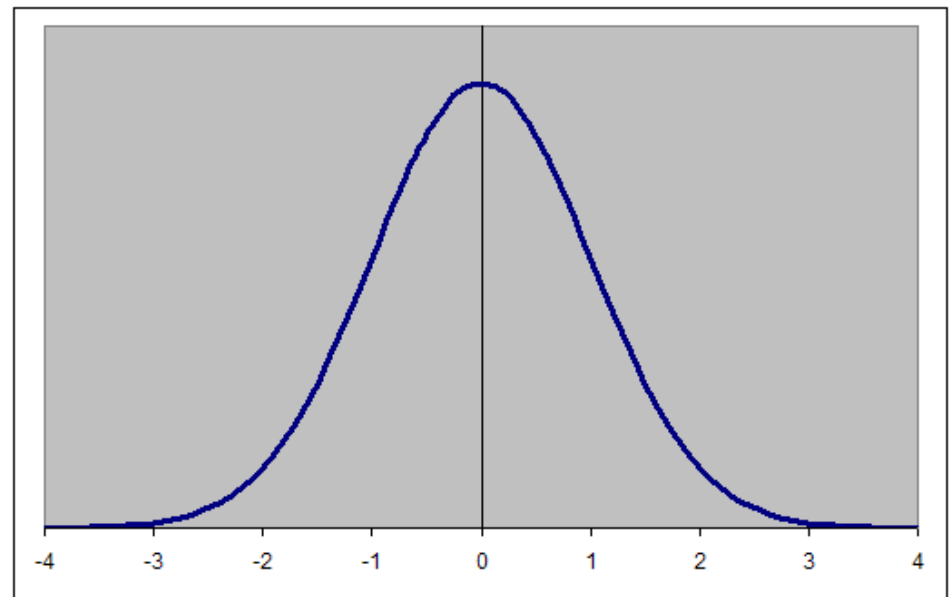
$$e = 2,7182818284590452536\dots$$

On més apareix e?



$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

Campana de Gauss
Corba normal:
Poblacions normals



Descomposició radioactiva



Si N és el nombre de partícules radioactives en el temps t i τ el temps de vida mitjà d'una partícula

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau}.$$

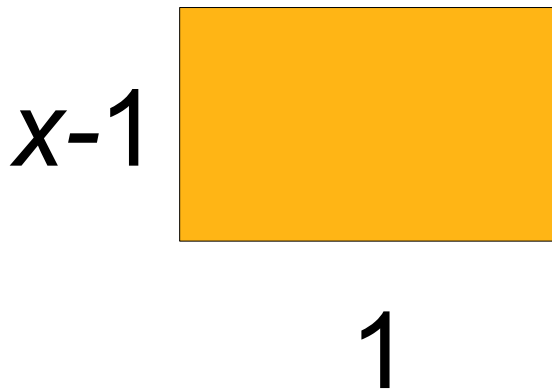
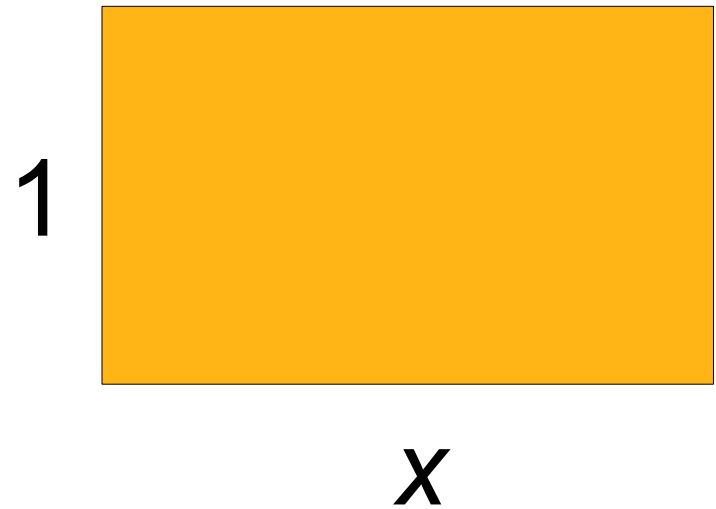
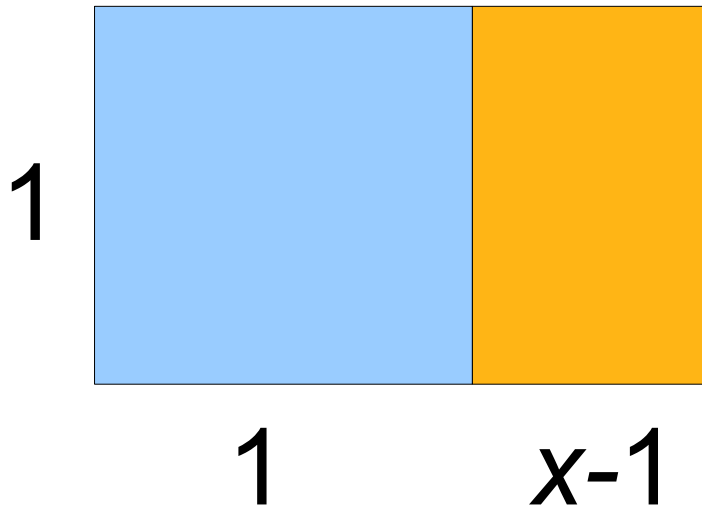
Identitat d'Euler



A photograph of a rock with the Euler identity carved into it. The rock is light-colored and irregularly shaped, resting on a bed of darker, jagged rocks. The carving is in a simple, slightly weathered font. Above the main equation, the numbers 1, 2, and 3 are carved in a small, vertical column. The main equation is $e^{i\pi} + 1 = 0$. The rock is surrounded by other rocks and some green grass on the left.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Rectangles daurats



$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Rectangles d'or

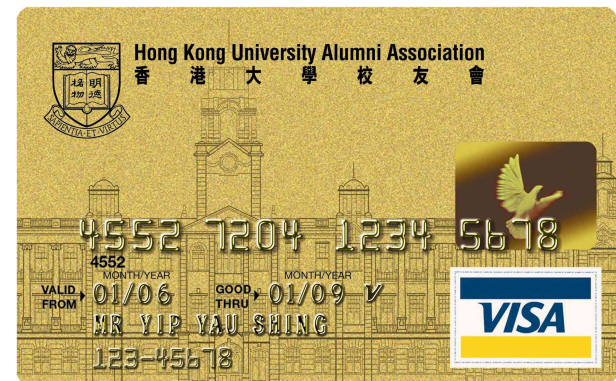
1



$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$1+x$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887...$$



Targetes de crèdit: 1,58577

Raó àuria, nombre d'or

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\dots$$

Φ φ

- Símbol proposat al 1900
- En honor de Fídies, escultor del Partenó

Conills

Leonardo di Pisa, Fibonacci (1202)

- *Liber Abaci*
- Hi presenta el sistema decimal
- Estudia poblacions de conills



1



1



2



3



5



8



Successió de Fibonacci

- Quant creix la població d'un mes a l'altre?

$$1/1=1$$

$$2/1=2$$

$$3/2=1,5$$

$$5/3=1,66666...$$

$$8/5=1,6$$

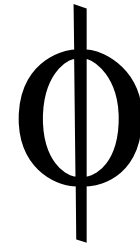
$$13/8=1,625$$

$$21/13=1,615138...$$

$$34/21=1,619047...$$

$$55/34=1,617647...$$

Cada vegada més
prop de:

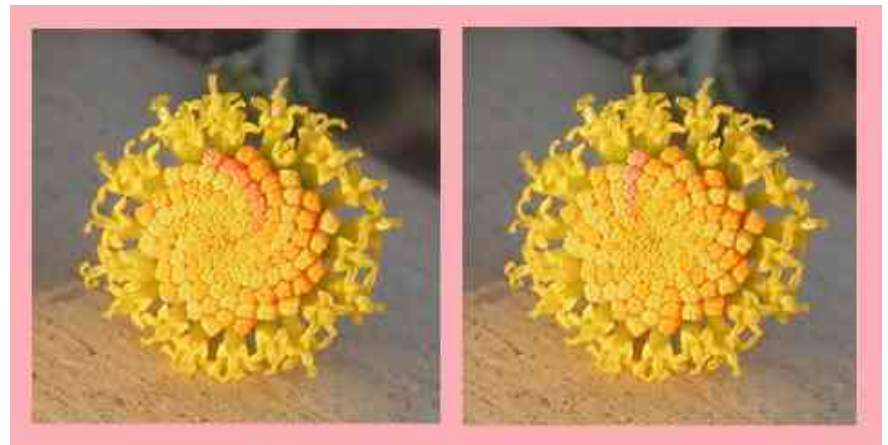


Successió de Fibonacci:

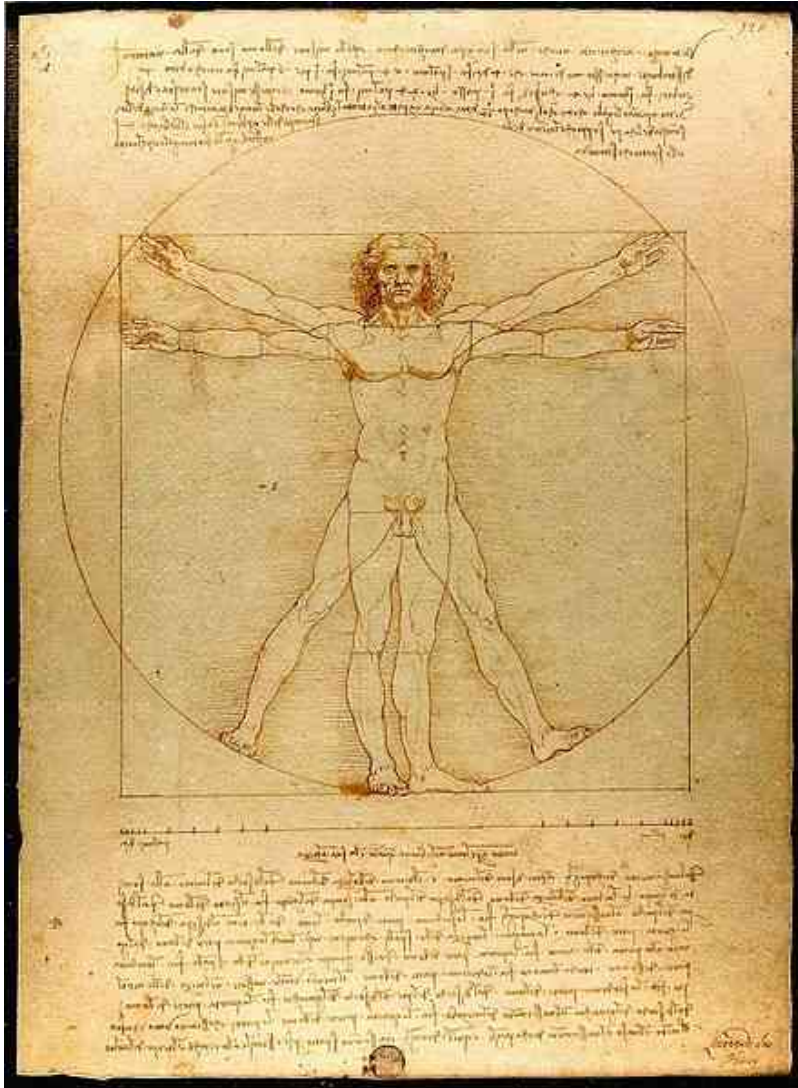
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,...



13, 21



Home de Vitruvi



Leonardo da Vinci
(1492)

- Proporcions del cos humà
- L'alçada de l'home entre l'alçada fins el melic:

Raó àuria



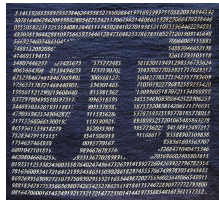
Els protagonistes



$$e = 2,7182818284590452353602874713527...$$

Irracional

Transcendent



$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795...$$

Irracional

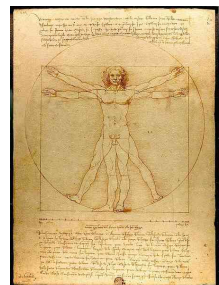
Transcendent



$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097...$$

Irracional

Algebraic ($x^2-2=0$)



$$\varphi = 1,6180339887498948482045868343656...$$

Irracional

Algebraic ($x^2-x-1=0$)

Història de Pi. Viquipèdia.

http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%CF%80

Història de l'arrel quadrada de dos.

http://www.wikilingua.net/ca/articles/r/a/%C3%AD/Ra%C3%ADz_cuadrada_de_2.html

50 Cosas que hay que saber sobre matemáticas, Tony Crilly





GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE CIENCIA
E INNOVACIÓN



**Govern
de les Illes Balears**

Conselleria d'Innovació,
Interior i Justícia

Direcció General de Recerca,
Desenvolupament Tecnològic i Innovació



FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA