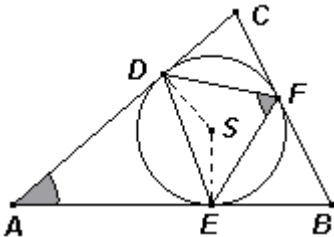


**Cangur-2000 Nivell 4**

Les preguntes números 1 a 10 valen 3 punts cadascuna

1. Quin és el residu de la divisió de $3^{2000} \cdot 5^{2001} - 2$ per 15?
- 0
 - 2
 - 5
 - 8
 - 13
-
2. Una persona comença a caminar des d'un punt A del desert. Camina 10 km cap al nord i després, successivament, 10 km a l'est, 6 km al sud, 2 km a l'oest, 8 km al nord, 4 km a l'oest i, finalment, 9 km al sud, i així arriba a un punt B . Quina és la distància entre A i B , expressada en quilòmetres?
- 0
 - 1
 - $\sqrt{5}$
 - 5
 - $10\sqrt{2}$
-
3. Totes les frases que la llebre diu de dilluns a dimecres són mentida i, en canvi, de dijous a diumenge diu sempre la veritat. Una vegada, l'Àlicia va trobar la llebre i li va preguntar quin dia era. La llebre li va dir aquestes dues frases: *Ahir vaig dir mentides. L'endemà de demà i el dia següent també diré mentides*. Fes com va fer l'Àlicia i dedueix quin dia de la setmana era.
- Dilluns
 - Dimarts
 - Dimecres
 - Dijous
 - Divendres
-
4. L'Anna i en Joaquim tenen una filla, la Maria. En Joaquim és quatre anys més gran que l'Anna i la mitjana de les seves dues edats és de 39 anys. La mitjana d'edats de la Maria i el seu pare és de 23 anys. Quants anys té la Maria?
- 5
 - 7
 - 11
 - 13
 - 15
-
5. Una nau espacial va des de la Terra cap a un suposat planeta que s'ha descobert i que és a 2^{20} km de distància. Quan la nau ha recorregut la quarta part del camí perd el contacte per ràdio i no el recupera fins al moment en què ja està a 2^{19} km. Quants quilòmetres va viatjar la nau sense comunicació amb la Terra?
- 2^8
 - 2^9
 - 2^{10}
 - 2^{18}
 - 2^{19}
-
6. En la figura adjunta, l'angle $\angle DAE = 32^\circ$. A més, hi veus el cercle inscrit en el triangle, de centre S i el triangle DEF format pels punts de tangència amb els costats. Quina és la mesura en graus de l'angle $\angle DFE$?
- 
- 46
 - 58
 - 64
 - 74
 - 148
-
7. En un tren viatgen x persones en primera classe i, a més, y persones en segona classe, no tantes com a la primera. En **Cangur**, que viatja en segona classe amb la seva mare,
- 30
 - 35

s'adona que els nombres x i y són primers entre ells i que compleixen $x \cdot y = 300$.
Quin és el mínim nombre de viatgers del tren que pot complir aquestes condicions?

- 3. 37
- 4. 56
- 5. 79

8. Per un cert nombre enter positiu a , el resultat de la suma
 $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$
és un nombre amb tots els seus dígits iguals. Quin serà aquest dígit?

- 1. No pot ser
- 2. 0
- 3. 1
- 4. 5
- 5. 9

9. Un nou antibiòtic s'aplica per combatre una infecció. Els experiments de laboratori han demostrat que la primera dosi atura la infecció i ja no augmenta la quantitat de bacteris. Les dosis posteriors, subministrades cada vuit hores, eliminen cada una la meitat dels bacteris existents i impedeixen que es reproduïxin els que queden. Quants bacteris quedaran, per cada milió de bacteris inicial, després que hagi fet efecte la setena dosi?

- 1. 5^3
- 2. 5^6
- 3. 10^3
- 4. $(10^4)/3$
- 5. $(10^6)/6$

10. Sigui f la funció $f(x) = x^x$. Quina és l'expressió correcta de $f(f(x))$?

- 1. x^{2x}
- 2. x^{x^2}
- 3. x^{x^x}
- 4. $x^{x^{x+1}}$
- 5. $x^{x^{x^x}}$

Les preguntes números 11 a 20 valen 4 punts cadascuna

11. Els déus van castigar Sísif a carregar una pedra i pujar-la fins al cim d'una muntanya però, a causa de la maledicció, en arribar a dalt la pedra li relliscava cap avall i havia de tornar-ho a intentar. Sísif s'anava cansant, i per això en cada pujada trigava el doble de temps que en l'anterior. Ara bé, procurava recuperar temps, i en cada baixada trigava la meitat que en la precedent. La primera vegada va trigar 5 hores en el trajecte de pujar i baixar, i la segona va estar-hi 7 hores. Quant de temps hi estarà, en el tercer intent?

- 1. 6 h
- 2. 9 h
- 3. 9 h 30 min
- 4. 12 h
- 5. 12 h 30 min

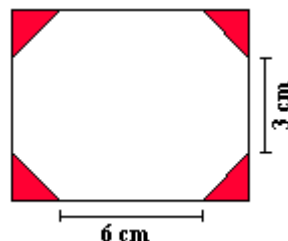
12. En Marc es vol comprar una calculadora que costa 3800 PTA, però amb els seus estalvis no hi arriba. Ens diu: *Si algú afegís als meus estalvis la cinquena part del que tinc estalviat, llavors només em faltaria la quarta part del que em falta realment*. Quant ha estalviat en Marc?

- 1. 600 PTA
- 2. 1200 PTA
- 3. 2400 PTA
- 4. 3000 PTA
- 5. 3200 PTA

13. X , Y i Z representen tres dígits, amb $X > Z$, que formen un número de tres xifres, XYZ . Si fem la resta $XYZ - ZYX$, resulta un nombre de tres xifres amb la xifra de les centenes igual a 4. Calcula els valors de la xifra de les desenes i la xifra de les unitats d'aquesta diferència.

- 1. 5 i 9
- 2. 9 i 5
- 3. 5 i 4
- 4. 4 i 5
- 5. No es pot saber

14. En un rectangle tallem quatre triangles isòsceles iguals, un de cada cantonada. Els segments que queden sobre els costats del rectangle tenen mesures de 3 cm i 6 cm, com mostra la figura, i l'àrea de l'octàgon que resulta és de 62 cm^2 . Quina és, en centímetres quadrats, l'àrea del rectangle inicial?



1. 78
2. 74
3. 70
4. 68
5. Fa falta més informació per determinar-ho

15. Busca la solució de l'equació

$$2^{2000} + 4^{1000} + 8^{667} = 16^x.$$

1. 500
2. 500,5
3. 501
4. 1500,25
5. No es pot fer sense calculadora

16. Si saps que $\log_p 1999 = 2000$, quin és el valor de $\log_{p^2} \sqrt{1999}$?

1. 500
2. 1000
3. 2000
4. 4000
5. 8000

17. Calcula l'àrea del triangle determinat per les rectes

$$2x - y + 4 = 0, \quad 2x + 3y - 12 = 0 \quad \text{i} \quad y = 0.$$

1. 8
2. 12
3. 15
4. 16
5. 32

18. Busca la solució x de l'equació

$$\left((2^{2^x} - 1) \cdot (2^{2^x} + 1) + 1 \right)^{1/4} = 256.$$

1. 1
2. 4
3. 7
4. 10
5. No es pot fer sense calculadora

19. Quants punts d'aquest full estan situats a la mateixa distància de dos vèrtexs consecutius del quadrat i, alhora, també a una distància d'un altre vèrtex igual al costat del quadrat?



1. Cap
2. 2
3. 4
4. 8
5. Més de 8

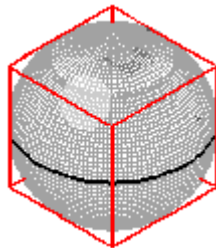
20. Sigui f una funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que compleix les condicions

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(2000) = -2000.$$

Determina el valor de $f(1)$.

1. -1
2. 1
3. 0
4. -2000
5. 2000

21. Una esfera té el seu centre en el centre d'un cub de 3 cm d'aresta i és tangent a totes les arestes del cub. Quin és el volum d'aquesta esfera, expressat en centímetres cúbics?



1. 27, com el del cub
2. $9\pi\sqrt{2}$
3. 18π
4. $18\pi\sqrt{2}$
5. 27π

22. Quants nombres naturals compleixen la propietat que 91 és el més gran dels seus divisors propis (és a dir, diferents del nombre considerat)?

1. 8
2. 6
3. 5
4. 4
5. 3

23. En aquest exercici, $[x]$ representa la part entera del nombre x i $\{x\}$ la seva part decimal.
Quantes solucions té l'equació $1998[x] + 1999\{x\} = 2000$?

1. Cap
2. 1
3. 2
4. 2001
5. Infinites

24. Una nau tripulada va arribar a un planeta llunyà i va enviar el missatge següent : *Hi ha habitants en aquest planeta! N'hi ha que són vermells, d'altres blaus i d'altres verds. Tots tenen la mateixa alçada i tots tenen 2 mans. També tots tenen peus: n'hi ha que en tenen 2, d'altres 3, o bé 4, o fins i tot 5. El dia 16 de març de l'any 2000 hi haurà un partit de futbol entre els tripulants de la nau i un equip autòcton. Quin és el nombre mínim d'habitants del planeta que caldria seleccionar per poder assegurar que entre els seleccionats es podrà formar l'equip amb 11 habitants idèntics en els «aspectes físics» que s'han comentat?*

1. 13
2. 120
3. 121
4. 144
5. 145

25.

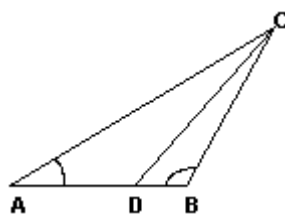
- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Sortida de A: 6.00 hores del dilluns • Sortida de B: 13.00 hores del dimecres | <ul style="list-style-type: none"> Arribada a B: 14.00 hores del dimarts Arribada a A: 15.00 del dimecres |
|--|---|

El rètol anterior mostra els horaris dels vols entre dos països molt llunyans, donats amb les hores locals respectives. En condicions normals, aquests vols duren el mateix temps a l'anada que a la tornada. Quin dia i quina hora era al país B en el moment que a A començava l'any 2000?

1. 9.00 hores del 31 de desembre de 1999
2. 15.00 hores del 31 de desembre de 1999
3. També en aquell moment començava l'any 2000
4. 9.00 hores de l'1 de gener de 2000
5. 15.00 hores de l'1 de gener de 2000

26. La figura de la dreta mostra un triangle ABC en què l'angle $\angle A = 30^\circ$, l'angle $\angle B = 120^\circ$ i la recta CD és la bisectriu de l'angle $\angle ACB$.

Quin és el valor de la raó $\frac{BC}{CD}$?

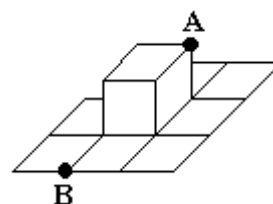


1. $1/\sqrt{2}$
2. $1/\sqrt{3}$
3. $\sqrt{2/3}$
4. $\sqrt{3}/2$
5. $\sqrt{2}/3$

- 27 De quantes maneres podem escriure el número 447 com a suma de nombres positius imparells consecutius?

1. Cap
2. 1
3. 2
4. 4

28. Quina és la mínima distància, expressada en centímetres, que pot recórrer una formiga per anar des del punt A fins el punt B movent-se per la superfície dibuixada, en la qual tots els quadrats tenen de costat 1 cm?

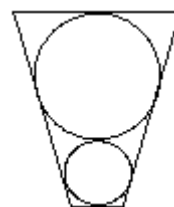


1. $2 + \sqrt{2}$
2. $2\sqrt{2}$
3. $\sqrt{10}$
4. $1 + \sqrt{5}$
5. 4

29. L'entrenador del Cangur voleibol club ha de repartir les dotze noies que formen part de la plantilla en dos equips de sis per a un entrenament. De quantes maneres pot fer el repartiment si vol que l'Àlicia i la Carme juguin en el mateix equip i, en canvi, la Laia i la Rosa juguin en equips diferents?

1. 56
2. 58
3. 112
4. 924
5. Més de 2000

30. A l'interior d'un trapezi isòsceles de bases 9 cm i 1 cm, s'han inscrit dos cercles tangents, de manera que el radi del gros és el triple del radi del petit. Quina mesura, expressada en centímetres, tenen els costats iguals del trapezi?



1. 9
2. 8
3. $6\sqrt{3}$
4. $6\sqrt{2}$
5. 7,5